

Notes and Sources

Une lettre d’Euler à d’Alembert retrouvée

Vanja Hug*, Thomas Steiner

Institut de Mathématiques de l’Université de Bâle, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel, Suisse

Disponible sur Internet le 4 septembre 2014

Abstract

For a long time the whereabouts of Leonhard Euler’s first letter to Jean Le Rond d’Alembert, dated 2nd October 1746, were unknown, but recently a photocopy of this letter was discovered at the British Library in London. Although dealing with hydrodynamical matters, Euler in this letter does not support d’Alembert’s views against Daniel Bernoulli as had hitherto been assumed. In guarded words Euler alludes to the general difficulties encountered when studying hydrodynamics as well as to the perplexity concerning the problem of several bodies colliding. The main part of the letter, however, contains the essentials of the theory of the vibrating string that Euler was to publish a few years later (1749/1750).

© 2014 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Résumé

Pendant longtemps, la trace de la première lettre de Leonhard Euler à Jean Le Rond d’Alembert (2 octobre 1746) a été perdue. Mais récemment une photocopie de cette lettre a été découverte à la British Library à Londres. Dans cette lettre, Euler n’exprime pas son avis sur les différends de d’Alembert avec Daniel Bernoulli concernant l’hydrodynamique, comme on l’avait cru depuis 1885 grâce à des informations indirectes. Il parle bien de l’hydrodynamique, mais en mentionnant les problèmes qui se posent quand on examine ce sujet. L’objet principal de la lettre est cependant le problème des cordes vibrantes, qui est traité en détail. La lettre contient déjà l’essence de la théorie qu’Euler allait publier quelques années plus tard (1749/1750) sur cette matière.

© 2014 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

MSC: 01A50

Keywords: Euler; d’Alembert; Daniel Bernoulli; Vibrating string; Hydrodynamics

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail: vanja.hug@bluewin.ch (V. Hug).

Le 2 juin 1746, Jean Le Rond d’Alembert (1717–1783) obtient le prix de l’Académie des sciences de Berlin pour son mémoire *Réflexions sur la cause générale des vents*.¹ Le même jour, il est élu membre étranger de l’Académie de Berlin.² Ces deux événements sont l’occasion pour d’Alembert d’écrire sa première lettre à Leonhard Euler (1707–1783).³ Dans cette lettre, d’Alembert remercie Euler d’avoir soutenu⁴ la pièce de concours susmentionnée et de s’être exprimé positivement sur le *Traité de dynamique*⁵ ainsi que sur le *Traité de l’équilibre et du mouvement des fluides*⁶ dont il lui adresse des exemplaires. Il ajoute qu’il espère obtenir son avis concernant quelques questions d’hydrodynamique sur lesquelles il n’est pas d’accord avec Daniel Bernoulli (1700–1782).⁷ Puis, d’Alembert annonce la parution de la traduction française de sa pièce sur les vents, qui était attendue pour novembre et qui contenait beaucoup de compléments.⁸ En post-scriptum d’Alembert mentionne un mémoire qu’il a envoyé à l’Académie de Berlin. Il s’agit des *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*.⁹

La réponse d’Euler à cette lettre, datée du 2 octobre 1746, n’a pendant longtemps pas été localisée.¹⁰ Elle semble avoir été vendue dans la deuxième moitié du XIX^e siècle par la maison Charavay à Paris, car elle est mentionnée dans le fichier Charavay de la Bibliothèque Nationale de France, constitué d’extraits des catalogues de cette maison d’autographes.¹¹ L’acquéreur était sans aucun doute l’Anglais Alfred Morrison, un des collectionneurs d’autographes les plus importants de cette époque, qui fit imprimer un catalogue de sa collection. La lettre d’Euler à d’Alembert du 2 octobre 1746 est mentionnée dans le deuxième volume de ce catalogue.¹² Mais comme le catalogue de la collection Morrison était destiné à circuler seulement en privé, l’endroit où se trouvait la lettre du 2 octobre 1746 resta inconnu et tous les éditeurs des correspondances d’Euler et de d’Alembert furent pendant plus d’un siècle réduits à des conjectures sur son contenu. En 1885 – par ironie la même année où le catalogue Morrison fut imprimé –, Charles Henry cita une lettre de d’Alembert du 28 octobre 1746 à Jean-Baptiste Guérout d’Herten, dans laquelle d’Alembert écrivait: “J’ay reçu en même tems une lettre magnifique d’Euler, dans laquelle il m’avoue que j’ay eu raison contre luy à l’égard de mes différens avec Daniel Bernouilli.”¹³ Cette citation amena à penser que dans sa lettre du 2 octobre 1746, Euler exprimait son avis concernant la divergence d’opinions entre Daniel Bernoulli et d’Alembert au sujet de l’hydrodynamique,¹⁴ ce qui s’avère erroné à la lumière de la récente redécouverte du texte original d’Euler.

De fait, une photocopie de l’autographe d’Euler se trouve à la British Library de Londres.¹⁵ Cette lettre a donc très probablement fait partie de collections privées en Angleterre depuis son acquisition par Alfred Morrison au XIX^e siècle. Mais en septembre 2004 elle a été vendue à nouveau et transférée hors du Royaume-Uni (sa localisation exacte est inconnue). Lors de l’acte de vente, pour lequel la British Library

¹ D’Alembert (1747a).

² Winter (1957, p. 95).

³ R 14: Euler (1980, p. 249; D’Alembert à Euler, 3 août 1746).

⁴ Euler (1862, E 851).

⁵ D’Alembert (1743).

⁶ D’Alembert (1744).

⁷ Bernoulli (1738).

⁸ D’Alembert (1747b).

⁹ D’Alembert (1749a).

¹⁰ R 14a: Cf. Euler (1975, p. 469), Euler (1980, p. 250).

¹¹ Euler (1980, p. 250, note 1).

¹² Thibaudeau (1885, p. 104).

¹³ Henry (1885, p. 649). De récentes recherches ont d’ailleurs démontré que la citation de Charles Henry est en partie défectueuse. Dans la lettre originale, d’Alembert avait écrit: “[...] il m’avoue que j’ai eu raison contre lui et à l’égard de mes différens avec Dan. Bernoulli, il me promet de les examiner.” Nous remercions Irène Passeron de nous avoir communiqué le texte correct.

¹⁴ R 14a: Euler (1975, p. 469), Euler (1980, p. 13), D’Alembert (2009, p. 6).

¹⁵ RP 8576/1.

a fourni son expertise et son conseil à l'institution gouvernementale qui est responsable de l'exportation de biens culturels, des photocopies de la lettre d'Euler ont été faites, et elles font désormais partie de la "collection of copies of exported manuscripts deposited under Government export regulations".

Voilà l'histoire de cette lettre de quatre pages, qui est ici présentée pour la première fois¹⁶:

Monsieur

Monsieur de Maupertuis m'a remis tant Votre lettre que Vos ouvrages, dont je Vous suis infiniment obligé: ces derniers m'avoient inspiré d'abord une si haute idée de Votre Genie, que tout ce qui vient de Vous, me doit être précieux au dernier degré. J'ai vu avec beaucoup de surprise, que Vous maniez avec tant de facilité les plus difficiles problèmes de la mécanique, dont tout autre que Vous auroit peur, d'en entreprendre la solution. La plupart des problèmes, que Vous traitez dans Votre *Dynamique*¹⁷ sont de cette nature, et je dois avouer franchement, quand je traitois le problème du mouvement *vacillatoire*¹⁸ d'un corps à une base arrondie sur une surface quelconque, que je ne savais pas encore, comment introduire dans le calcul le mouvement progressif, desorte que Votre remarque est parfaitement bien fondée.¹⁹ Pour Votre *Hydrodynamique*²⁰ je ne l'ai pas encore parcourue avec tant d'application, pour être en état de connoître clairement les différends entre Vous et M^r Bernoulli, mais je ne manquerai pas d'employer à cette recherche le premier loisir, que je trouverai. Cependant il me semble que dans les problèmes d'Hydrodynamique on ne peut pas si sûrement compter sur la vérité des solutions, qu'on tire des principes de la mécanique, car on est toujours obligé de supposer un certain mouvement dans les différentes parties de la liqueur, pour en déterminer les forces nécessaires à leur accélération; et si en effet le vrai mouvement étoit différent, on ne devoit pas être surpris, si l'expérience étoit contraire au calcul. On rencontre principalement ces difficultés quand on veut déterminer les effets de la résistance de l'eau sur un corps solide, qui s'y meut avec une vitesse quelconque: car de quelle manière, qu'on détermine les pressions de l'eau sur la surface du corps, je n'ai jamais pu mettre d'accord le calcul avec l'expérience, et je croi que la détermination de la résistance est une partie essentielle de l'hydrodynamique.

Permettes moi aussi, que je Vous marque une réflexion sur Votre problème, où plusieurs corps se choquent à la fois²¹; il me semble que ce problème en lui même est indéterminé, et qu'il faut absolument avoir égard à la durée de chaque choc. Car quoiqu'on suppose, que le choc s'acheve dans un instant, on est neant moins obligé de comparer entr'eux ces divers instants, et selon le divers rapport, qui s'y peut trouver, la solution deviendra différente: il y a même des cas, où ces instants différent nécessairement entr'eux; et alors on sera obligé de résoudre les chocs dans leurs éléments. Or je voi que Vous avez déjà fait presque la même réflexion dans Vos remarques sur ce problème.

M^r de Maupertuis m'a aussi communiqué Votre *pièce sur le mouvement d'une corde*,²² dont j'ai été tout à fait charmé. Jusqu'ici on n'avoit considéré que les vibrations régulières, où toute la corde vient toujours en même tems, dans sa situation naturelle: or ce mouvement ne peut avoir lieu, que dans le cas, où la corde a été forcée au commencement, de son état naturel selon la trochoïde allongée: de sorte que, si la corde n'a

¹⁶ La transcription respecte strictement l'orthographe et la ponctuation originales. Les titres d'ouvrages et les mots soulignés dans l'original ont été mis en italiques. Les abréviations sont supprimées et rendues par des parenthèses carrées.

¹⁷ D'Alembert (1743).

¹⁸ Aujourd'hui on dirait oscillatoire. Mais à l'époque, "vacillatoire" était usuel. Cf. par exemple "Des Corps qui vacillent sur des plans" ou "les vacillations du Corps sur le plan" (D'Alembert, 1743, p. 122, 124).

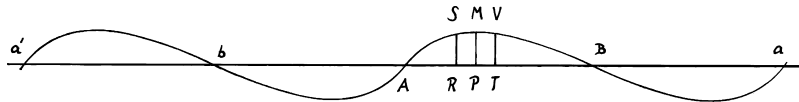
¹⁹ D'Alembert avait écrit: "Mais je ne sai ce qui a empêché que M. Euler n'eût égard à ce dernier Mouvement dans sa solution" (D'Alembert, 1743, p. 125). Dans la nouvelle édition du *Traité de dynamique* de 1758, d'Alembert ajouta la phrase suivante, qui cite presque mot pour mot la lettre d'Euler: "Ce grand Géometre m'a fait l'honneur de me mander depuis, par une Lettre du 2 Octobre 1746, que quand il avoit traité ce Problème, il ignoroit la manière de faire entrer dans le calcul le mouvement progressif" (D'Alembert, 1758, p. 196).

²⁰ D'Alembert (1744).

²¹ Cf. D'Alembert (1743, seconde partie, chap. 3, § 4).

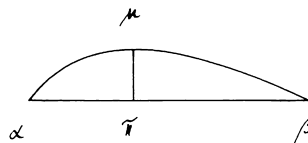
²² D'Alembert (1749a).

été frappée que dans un point, ou qu'on lui ait donné une figure quelconque en la relachant subitement, il est clair, que son mouvement doit être bien different du premier, et que la courbure de la corde à chaque instant doit dependre de la courbe, que la corde a eu au commencement. Votre solution est aussi parfaite qu'ingenieuse, par laquelle Vous savez si admirablement determiner la nature des fonctions, dont Vous ne savez que quelques proprietes de leurs differentiels. Quoique Vous n'en fassiez aucune application à des cas particuliers, j'ai remarqué qu'on en peut determiner tres aisement dans chaque cas proposé le mouvement entier de la corde.



[Figure 1.]

Soit AMB [cf. Figure 1] la courbe qu'on eut donnée à la corde au commencement: (soit reguliere ou irreguliere) transportes la meme figure alternativement sur la droite prolongée de part et d'autre AB en Ab , ba' etc. et Ba etc. desorte que Ab , $a'b$, aB etc. soient egales et semblables à AB .



[Figure 2.]

Soit ensuite $\alpha\mu\beta$ [cf. Figure 2] la courbure de la meme corde après un tems t , qu'elle a été subitement relachée; et ayant pris l'abscisse $\alpha\pi = AP$, prenes sur AB de part et d'autre $PR = PT = t$, et suivant Votre solution l'appliquée $\pi\mu$ sera toujours $= \frac{RS+TV}{2}$. Si le tems t est plus grand [de sorte]²³ que les points R et T tombent hors d' AB , il faut prendre les appliquées que les courbes Ab et Ba donneront. On peut aussi donner une équation analytique qui renferme la solution generale. Soit la longitude de la corde $AB = \alpha\beta = c$ le poids de la corde $= C$, la force, dont la corde est tendue $= F$, et après qu'on eut donne à la corde au commencement une figure quelconq[ue] AMB , de laquelle le mouvement de la corde ait commencé: apres un tems $= t$, exprimé comme on est accoutumé de le faire dans la mecanique, nommes $t\sqrt{\frac{cF}{2C}} = u$, et soit π l'arc de 180° dans un cercle dont le rayon $= 1$. Cela posé mettant l'abscisse $\alpha\pi = x$ et l'appliquée $\pi\mu = y$, on aura toujours:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{c} \cos \frac{\pi u}{c} + \beta \sin \frac{2\pi x}{c} \cos \frac{2\pi u}{c} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{c} \cos \frac{3\pi u}{c} + \delta \sin \frac{4\pi x}{c} \cos \frac{4\pi u}{c} + \text{etc.}$$

Si Vous mettes $u = c$, le tems t deviendra $= \sqrt{\frac{2Cc}{F}}$ et ce tems sera à une seconde comme $\sqrt{\frac{Cc}{2Fa}}$ à 1, si a marque la hauteur, par laquelle un corps tombe dans une seconde, ce qui sert à reduire les tems t de ce calcul à la mesure ordinaire. Donc au commencement la courbure de la corde sera exprimée par cette équation en posant $u = 0$: où les cosinus des angles $\frac{\pi u}{c}$, $\frac{2\pi u}{c}$ etc. deviennent égaux au rayon $= 1$,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{c} + \beta \sin \frac{2\pi x}{c} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{c} + \delta \sin \frac{4\pi x}{c} + \text{etc.}$$

où les coefficients α , β , γ , δ , etc. doivent être determinés par la figure initiale. Si apres α tous les autres coefficients β , γ , δ , etc. evanouissent, on obtient le cas des oscillations regulières, qui sont les seules, qu'on ait considerées jusqu'ici: et l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{c}$ marque la trochoide allongée, ou bien la *lineam sinuum*

²³ Complément des éditeurs pour rendre la phrase d'Euler plus intelligible.

de Leibniz: et apres le tems $t = u\sqrt{\frac{2C}{Fc}}$, la courbe sera exprimée par $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{c} \cos \frac{\pi u}{c}$, et mettant $u = \frac{1}{2}c$, à cause de $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, toute la corde parviendra dans la ligne droite AB , et partant une oscillation ou vibration s'achevera en mettant $u = c$, et ce tems sera $= \sqrt{\frac{Cc}{2Fa}}$ '' , ou dans une seconde la corde fera $\sqrt{\frac{2Fa}{Cc}}$ vibrations. Si hormi β toutes les autres lettres α, γ, δ etc. evanouissent, on aura le cas $y = \beta \sin \frac{2\pi x}{c} \cos \frac{2\pi u}{c}$, où les deux moitiés de la corde achevent separement leurs vibrations: et ainsi de suite, de sorte que l'equation generale donnée contient tous les mouvemens possibles: Elle a aussi la propriété, qui est requise selon Votre theorie: Car en ne supposant que x variable, on aura²⁴

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{\alpha\pi^2}{cc} \sin \frac{\pi x}{c} \cos \frac{\pi u}{c} - \frac{4\beta\pi^2}{cc} \sin \frac{2\pi x}{c} \cos \frac{2\pi u}{c} - \text{etc.}$$

et en ne mettant que u variable on aura

$$\frac{ddy}{du^2} = -\frac{\alpha\pi^2}{cc} \sin \frac{\pi x}{c} \cos \frac{\pi u}{c} - \frac{4\beta\pi^2}{cc} \sin \frac{2\pi x}{c} \cos \frac{2\pi u}{c} - \text{etc.}$$

de sorte que $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{du^2}$.

Enfin je serai extrêmement ravi de voir Vos additions à Votre excellente *Piece sur les Vents*,²⁵ et je Vous remercie par avance de ce beau présent que Vous me destines: étant avec la plus parfaite consideration

Monsieur

Votre très humble et très obeissant serviteur

L. Euler

Berlin ce 2 Octobr. 1746

Euler commence sa réponse à d'Alembert par des louanges pour le *Traité de dynamique*²⁶ et le *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*.²⁷ En mentionnant le problème du mouvement vacillatoire (oscillatoire) d'un corps à base arrondie, Euler fait allusion à son mémoire *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium*,²⁸ qu'il avait présenté à l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg en 1735.

Il est difficile de juger de la sincérité des louanges d'Euler. La lettre et les deux ouvrages de d'Alembert lui ont été transmis par Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759). Celui-ci était président de l'Académie des sciences de Berlin depuis février 1746 et par là même le supérieur d'Euler. Maupertuis entretenait de bonnes relations avec la cour et le roi Frédéric II, et était de plus un ami de d'Alembert. Le 7 juillet 1745 déjà, Daniel Bernoulli avait écrit à Euler que Maupertuis, lors de son dernier séjour à Bâle en automne 1744, avait vanté le jeune d'Alembert, qu'il présentait alors comme un génie miraculeux.²⁹ Euler était donc conscient qu'il était opportun de s'exprimer positivement sur les travaux de d'Alembert.

²⁴ Bien qu'il s'agisse ici de dérivées partielles, Euler utilise le même symbole que pour les dérivées ordinaires. Pour cette raison nous les rendons par d . Ce n'est que quelques années plus tard qu'il introduit une distinction en mettant les dérivées partielles entre parenthèses: $(\frac{ddy}{dx^2})$; cf. Euler (1755, § 19).

²⁵ Les *Réflexions sur la cause générale des vents* firent l'objet de deux éditions parallèles, l'une parue à Paris en novembre 1746 (mais datée 1747) (D'Alembert, 1747b), l'autre à Berlin au cours de l'année 1747 (D'Alembert, 1747a). Celle de Paris comporte outre le texte de la pièce latine présentée au concours de l'Académie de Berlin une traduction française avec des additions de la part de d'Alembert.

²⁶ D'Alembert (1743).

²⁷ D'Alembert (1744).

²⁸ Euler (1740).

²⁹ R 160: Archives de l'Académie des sciences de Russie, filiale Saint-Petersbourg, f. 136, op. 2, n° 7, fol. 104v. Fuss (1843, p. 577–578).

Après son introduction élogieuse, Euler en vient à parler du *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* au sujet duquel d'Alembert lui a demandé son avis concernant ses différends avec Daniel Bernoulli.³⁰ Euler répond d'une façon un peu évasive en s'excusant de ne pas encore avoir trouvé le temps d'étudier cette œuvre de d'Alembert à fond. Il s'exprime de façon très générale sur les problèmes que pose l'hydrodynamique en se référant implicitement à sa *Scientia navalis*,³¹ qui était déjà terminée depuis plusieurs années, bien qu'elle ne fût pas encore publiée. Mais en évoquant l'antagonisme entre la théorie (les principes de la mécanique) et l'expérience, il n'a pas seulement à l'esprit les problèmes qu'il a rencontrés lui-même dans ce domaine, il défend aussi Daniel Bernoulli sans le nommer. Alors que d'Alembert avait traité l'hydrodynamique en mathématicien, Daniel Bernoulli s'en était occupé en physicien proche de l'expérience. Dans la lettre d'Euler on peut lire un léger reproche à d'Alembert de ne pas avoir assez considéré toutes les conditions dans lesquelles se meut un corps dans l'eau.

Dans sa lettre suivante à d'Alembert, écrite le 29 décembre 1746,³² Euler rend un jugement de Salomon pour se tirer d'affaire; il déclare que d'Alembert et Daniel Bernoulli ont raison tous les deux, mais que leurs théories ne sont valables que sous des conditions différentes: celle de Bernoulli dans un environnement rempli d'air, celle de d'Alembert dans un espace sans air.

Euler s'était déjà occupé intensivement des problèmes d'hydrodynamique. Au début des années 1730 il avait fait des expériences à Saint-Pétersbourg avec Daniel Bernoulli.³³ Ainsi pouvait-il se référer à des expériences pratiques dans ce domaine. L'hydrodynamique resta un sujet souvent discuté dans la correspondance entre Euler et Daniel Bernoulli, de même que dans celle d'Euler et Johann I Bernoulli (1667–1748).³⁴ En mentionnant – dans sa lettre du 2 octobre 1746 – qu'“on est toujours obligé de supposer un certain mouvement dans les différentes parties de la liqueur”, Euler a en tête les commentaires qu'il a ajoutés à sa traduction des *New principles of gunnery* de Benjamin Robins (1707–1751)³⁵ – parue un an seulement avant le premier contact avec d'Alembert –, dans lesquels il a formulé l'idée de calculer la résistance hydrodynamique par l'analyse du changement du mouvement des particules d'eau environnant un corps, provoqué par la collision avec ce corps.³⁶ Dans la lettre susmentionnée du 29 décembre 1746, Euler devient plus explicite en constatant que d'Alembert a omis de prendre en compte la pression atmosphérique, un sujet qu'il a également traité dans ses commentaires sur le livre de Robins.³⁷ Il est donc évident qu'Euler n'apprécie pas beaucoup la théorie de d'Alembert qu'il considère comme incomplète, sans le dire franchement.

La diplomatie d'Euler avait ses raisons. Dans la lettre du 7 juillet 1745 déjà mentionnée, Daniel Bernoulli l'avait prié de lire le *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* de d'Alembert – dans lequel Bernoulli était critiqué – et de lui donner son opinion là-dessus. L'attitude de Bernoulli envers d'Alembert était très négative. Il était d'avis que d'Alembert était présomptueux et d'une impertinente suffisance. Il souhaitait qu'on retienne “ces jeunes niais” d'exprimer leurs critiques trop librement. De plus, il ne prêtait à d'Alembert que des connaissances restreintes.³⁸

Et voilà que d'Alembert priait à son tour Euler de lui donner son avis sur le *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* et sur ses différends avec Daniel Bernoulli... Pour Euler, la situation était délicate.

³⁰ Bernoulli (1738).

³¹ Euler (1749a, E 110, E 111). Cf. en particulier vol. 1, chap. 5, § 465–611, et chap. 6, § 612–761.

³² R 15: Euler (1980, p. 251–253).

³³ R 15: Euler (1980, p. 251: Euler à d'Alembert, 29 décembre 1746).

³⁴ Cf. Euler (1998, p. 60–71).

³⁵ Robins (1742).

³⁶ Euler (1745, E 77, p. 435).

³⁷ Euler (1745, E 77). Cf. en particulier p. 451–470.

³⁸ Cf. note 29.

S’il avait donné raison à d’Alembert, il aurait contrarié son ami Daniel Bernoulli. Mais il ne pouvait pas non plus donner entièrement raison à Bernoulli pour ne pas irriter d’Alembert, et par là également Maupertuis.

Mais retournons à la lettre du 2 octobre 1746. Après quelques remarques sur le problème de plusieurs corps qui s’entrechoquent,³⁹ Euler aborde le sujet principal de sa lettre, les cordes vibrantes.⁴⁰ Évidemment il a attentivement lu le manuscrit du mémoire envoyé par d’Alembert à l’Académie des sciences de Berlin.⁴¹

Dans ce mémoire, d’Alembert avait pour objectif de montrer qu’il existe une infinité d’autres courbes que la sinusoïde qui satisfont au problème de la courbe formée par une corde tendue mise en vibration.⁴² Il considéra une corde fixée en ses deux extrémités formant une ligne droite au commencement de son mouvement. Des recherches que Brook Taylor (1685–1731) avait publiées trente ans auparavant sous le titre *Definire motum nervi tensi*,⁴³ d’Alembert retint surtout, outre quelques propriétés mécaniques de la corde, que les “excursions ou vibrations de la corde sont fort petites, ensorte que les arcs AM de la courbe qu’elle forme puissent toujours être supposés sensiblement égaux aux abscisses correspondantes AP ” (cf. Figure 3).



Figure 3. D’Alembert (1749a), première figure.

Cela lui permit d’introduire la fonction $y(s, t)$ qui désigne l’ordonnée du point M de la corde à l’instant t , s étant l’abscisse de M . Au cours de ses réflexions, il établit l’équation régissant les vibrations $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$ appelée aujourd’hui “équation d’onde de d’Alembert en dimension 1”. Transformant cette équation, il arriva à l’expression générale $y(s, t) = \Psi(t + s) + \Gamma(t - s)$, qui “renferme une infinité de courbes”.⁴⁴

C’est ici qu’Euler introduisit ses propres idées. Il partit d’une forme initiale arbitraire de la corde, dessinée d’un trait de plume, et construisit graphiquement une courbe en répétant cette forme vers l’infini, tant vers la droite que vers la gauche, en la posant alternativement au-dessus et au-dessous de l’axe (la position de repos de la corde), de sorte que partout les bouts correspondants soient joints ensemble (cf. Figure 1). Examinant cette courbe, il trouva une expression analytique pour la solution générale. Les dérivées partielles de cette solution satisfont aussi aux conditions requises par la théorie de d’Alembert.

Les explications d’Euler auraient pu ouvrir un dialogue sur ce thème entre les deux savants, mais il semble que d’Alembert n’entra pas dans la discussion. Sa réponse à Euler n’est pas conservée, pourtant on peut déduire de la lettre d’Euler à d’Alembert du 29 décembre 1746 que celui-ci n’a pas réagi aux réflexions d’Euler concernant les cordes vibrantes, peut-être parce que l’avis d’Euler sur ses différends avec Daniel Bernoulli au sujet de l’hydrodynamique lui paraissait pour l’instant plus important.

Euler à son tour ne réagit pas non plus par lettre à la suite du mémoire examinant le problème des cordes vibrantes que d’Alembert avait envoyé à l’Académie des sciences de Berlin vers la fin de 1746.⁴⁵ C’est dans cette suite que d’Alembert, partant des “cas particuliers” (nous dirions aujourd’hui des “conditions initiales”), tira quelques conclusions sur les propriétés des solutions du problème.⁴⁶ Bien qu’une corres-

³⁹ D’Alembert (1743, seconde partie, chap. 3, § 4).

⁴⁰ Pour en savoir plus sur l’histoire de ce problème alors très actuel, cf. par exemple Burkhardt (1908, p. 10–18), Truesdell (1960, p. 15–300), Szabó (1987, p. 317–350).

⁴¹ D’Alembert (1749a).

⁴² D’Alembert (1749a, § 1).

⁴³ Taylor (1717, p. 89).

⁴⁴ D’Alembert (1749a, § 7; 8).

⁴⁵ D’Alembert (1749b). Cf. aussi R 16: Euler (1980, p. 255: D’Alembert à Euler, 6 janvier 1747).

⁴⁶ D’Alembert (1749b). Pour une évaluation récente, cf. aussi la présentation du Mémoire 1 des *Opuscules* dans D’Alembert (2008, p. xxxv–xlvi, en particulier p. xxxvi–xxxvii).

pondance assez intense sur divers sujets scientifiques s'établît entre Euler et d'Alembert dans les années 1747 et 1748, les cordes vibrantes en restèrent absentes.

Mais cette matière allait bientôt être discutée sur la scène publique. Euler présenta sa propre solution au problème des cordes vibrantes lors d'une séance de l'Académie des sciences de Berlin le 16 mai 1748,⁴⁷ donc avant la publication des deux mémoires de d'Alembert.⁴⁸

Dans le courant de cette même année Euler, sachant que l'article de d'Alembert ainsi que sa suite allaient être insérés dans les *Mémoires* de l'Académie des sciences de Berlin pour l'année 1749, apparemment sans modifications malgré sa lettre du 2 octobre 1746, prépara la publication de sa version de la théorie des cordes vibrantes.⁴⁹ Comme la publication dans les *Mémoires* de l'Académie des sciences de Berlin ne pouvait avoir lieu qu'en 1750, Euler publia d'abord le mémoire latin qu'il avait lu aux membres de l'Académie en mai 1748 dans les *Nova Acta Eruditorum* de septembre 1749.

Dans son article Euler mentionna les mémoires que d'Alembert avait communiqués à l'Académie des sciences de Berlin. Il écrivit: "M. d'Alembert s'est attaché le premier, avec un succès des plus heureux, à l'examen de ce Problème, [. . .]. Mais, comme dans ces discussions sublimes on tire souvent un fruit fort considerable de la comparaison de plusieurs solutions différentes du même probleme, je ne balance point à proposer celle que j'ai trouvée sur cette question."⁵⁰ Par cette déclaration, Euler se mit en concurrence directe avec d'Alembert.

Selon Clifford Ambrose Truesdell, Euler a réagi à la hâte en écrivant son article pour les *Nova Acta Eruditorum* dans un délai de quelques mois, ce qui suppose que celui-ci ne connut que les mémoires imprimés de d'Alembert.⁵¹ Mais puisqu'en vérité Euler était déjà familier des mémoires de d'Alembert – du moins du premier – depuis 1746, il avait eu largement le temps d'élaborer son propre point de vue.⁵² En effet, sa première lettre à d'Alembert du 2 octobre 1746 contient déjà l'essence de son article de 1749.

D'Alembert riposta aussitôt en soumettant en 1750 son *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration* à l'Académie.⁵³ Dans cet article il défendit ses mémoires précédents⁵⁴ et souligna que la fonction intervenant dans sa solution "ne doit pas changer de forme". Il ajouta: "M. Euler a traité dans les *Mémoires* de 1748 le problème des cordes vibrantes par une methode entierement semblable à la mienne, quant à la partie essentielle au problème, et seulement, ce me semble, un peu plus longue."⁵⁵ Mais en fait les différences des points de vue des deux savants étaient plus fondamentales. Comme exposé plus haut, Euler partait d'une conception "graphique" de la notion de fonction, tandis que d'Alembert tenait à une notion plus formelle.

Il est intéressant de constater que d'Alembert ne réagit aux explications d'Euler que quand celles-ci furent publiées. Ce fut le commencement d'une longue controverse entre d'Alembert et Euler sur la théorie des cordes vibrantes, dans laquelle furent aussi impliqués Daniel Bernoulli et plus tard Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).⁵⁶

⁴⁷ Winter (1957, p. 126).

⁴⁸ D'Alembert (1749a, 1749b).

⁴⁹ Euler (1749b, E 119), Euler (1750, E 140).

⁵⁰ Euler (1750, E 140, p. 71). Le texte original latin se trouve dans Euler (1749b, E 119, p. 514). Nous citons ici la traduction française du texte d'Euler publié dans les *Mémoires* de l'Académie de Berlin.

⁵¹ Truesdell (1960, p. 245).

⁵² D'ailleurs Euler s'était occupé des cordes vibrantes dès sa jeunesse. En novembre 1726, âgé de 19 ans, il en parlait déjà dans sa toute première lettre à Daniel Bernoulli (R 91: Archives de l'Académie des sciences de Russie, filiale Saint-Petersbourg, f. 136, op. 1, n° 129, fol. 161–165). Cf. aussi Euler (1727, E 2, § 21).

⁵³ D'Alembert (1752).

⁵⁴ D'Alembert (1749a, 1749b).

⁵⁵ D'Alembert (1752, p. 358).

⁵⁶ Cette querelle est décrite en détail dans Euler (1980, p. 28–32, 315–316), Truesdell (1960, p. 237–300).

Daniel Bernoulli entra en scène en 1755 et proposa de résoudre le problème des cordes vibrantes par la superposition de tous les modes propres de vibration de la corde.⁵⁷ Cette idée fut immédiatement contestée par Euler: “Il me paroît encore douteux, si l’on peut dire que la courbe soit composée d’une infinité de trochoïdes: le nombre infini semble détruire la nature d’une telle composition.”⁵⁸ Dans son mémoire, Euler reprit de nouveau la construction déjà donnée dans sa lettre du 2 octobre 1746 en insistant sur le fait que la première courbe que l’on donne à la corde est “absolument arbitraire”,⁵⁹ ce qui serait la raison de l’universalité de sa solution, contrairement à ce que d’Alembert avait affirmé.

Épilogue: Après une rupture de douze ans dans leur correspondance, pendant laquelle leurs différends ne s’étaient manifestés que par des publications, Euler et d’Alembert reprirent contact en 1763 lors du séjour de d’Alembert à Berlin. Dans l’échange qui s’ensuivit, le problème des cordes vibrantes fut très présent – pour la première fois depuis la lettre d’Euler du 2 octobre 1746 il était abordé directement dans la correspondance et cette fois discuté aussi par les deux savants.

Pendant des décennies, Euler et d’Alembert avaient persévéré dans leurs points de vue respectifs sans déroger à leurs positions. Mais un léger rapprochement se fit sentir lorsque Euler avoua dans sa lettre à d’Alembert du 20 décembre 1763 qu’il avait reconnu que quelques limitations étaient absolument nécessaires, sans quoi sa solution du mouvement des cordes n’était pas valable.⁶⁰ Et d’Alembert, dans son tout dernier mémoire, intitulé *Sur les cordes vibrantes* et écrit pendant les dernières années de sa vie (entre 1779 et 1783), admit enfin la possibilité de fonctions définies par morceaux dans la solution des équations aux dérivées partielles⁶¹: “Ainsi, sa querelle avec Euler a-t-elle certainement exercé une grande influence sur l’évolution des idées de d’Alembert, de même que les remarques critiques de ce dernier, parfois tout à fait justes, ont influencé les conceptions d’Euler.”⁶²

Références⁶³

- D’Alembert, Jean Le Rond, 1743. *Traité de dynamique*, [...]. David l’aîné, Paris.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1744. *Traité de l’équilibre et du mouvement des fluides. Pour servir de suite au Traité de dynamique*. David l’aîné, Paris.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1747a. *Meditationes in generalem ventorum causam in quibus tentatur solutio problematis ab Illustrissima Academia Berolinensi propositi*. In: *Réflexions sur la cause générale des vents. Pièce qui a remporté le Prix proposé par l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Prusse pour l’Année MDCCXLVI*. Berlin, p. III–XXIV, 1–136.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1747b. *Réflexions sur la cause générale des vents*. David l’aîné, Paris.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1749a. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 3 (1747), 214–219.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1749b. *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 3 (1747), 220–249.
- D’Alembert, Jean Le Rond, 1752. *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 6 (1750), 355–360.

⁵⁷ Bernoulli (1755a, 1755b).

⁵⁸ Euler (1755, E 213, § 3).

⁵⁹ Euler (1755, E 213, § 10).

⁶⁰ R 47: Euler (1980, p. 324).

⁶¹ Chapitre VII du manuscrit inédit destiné à former le 9e volume des *Opuscles mathématiques*. Bibliothèque de l’Institut de France, Ms 1790. Cf. aussi Guilbaud et Jouve (2009, en particulier p. 106–107).

⁶² Euler (1980, p. 32).

⁶³ *Abréviations*:

E: un chiffre précédé par E désigne la numérotation des œuvres de Leonhard Euler selon [Eneström \(1910–1913\)](#).

R: un chiffre précédé par R désigne la numérotation des lettres de Leonhard Euler selon [Euler \(1975\)](#).

- D'Alembert, Jean Le Rond, 1758. *Traité de dynamique*, [...], Nouvelle Edition, revûe et fort augmentée par l'Auteur. David, Paris.
- D'Alembert, Jean Le Rond, 2008. *Œuvres complètes, série III: Opuscules et mémoires mathématiques, 1757–1783*. Vol. 1: *Opuscules mathématiques, tome 1 (1761)*. Sous la direction de Pierre Crépel et al. Éd. Frédéric Chambat et al. CNRS Éditions, Paris.
- D'Alembert, Jean Le Rond, 2009. *Œuvres complètes, série V: Correspondance générale*. Vol. 1: *Inventaire analytique de la correspondance 1741–1783*. Établi par Irène Passeron, avec la collaboration d'Anne-Marie Chouillet et Jean-Daniel Candaux. CNRS Éditions, Paris.
- Bernoulli, Daniel, 1738. *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis, Argentorati [Strasbourg].
- Bernoulli, Daniel, 1755a. *Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 9 (1753), 147–172.
- Bernoulli, Daniel, 1755b. *Sur le mélange de plusieurs especes de vibrations isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 9 (1753), 173–195.
- Burkhardt, Heinrich, 1908. *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. Leipzig (Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 10(2)).
- Eneström, Gustaf, 1910–1913. *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*. Leipzig (Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. (Ergänzungsbd. 4)).
- Euler, Leonhard, 1727. *Dissertatio physica de sono*, [...]. Basileae (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series III: *Opera physica, miscellanea, epistolae*. Vol. 1: *Commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes*. Ed. Eduard Bernoulli et al. In aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae/Berolini, 1926, p. 183–196) [E 2].
- Euler, Leonhard, 1740. *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium. Methodus nova et facilis*. *Comment. acad. sci. imp. Petropolitanae* 7 (1734–1735), 99–122. (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 10: *Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes*. Ed. Fritz Stüssi, Henri Favre. Orell Füssli, Turici [Zürich], 1947, p. 17–34) [E 40].
- Euler, Leonhard, 1745. *Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterscheid des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen*. Berlin (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 14: *Neue Grundsätze der Artillerie*. Ed. Friedrich Robert Scherrer. In aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae/Berolini, 1922, p. 1–409) [E 77].
- Euler, Leonhard, 1749a. *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*. 2 vols. Petropoli [Saint-Pétersbourg] (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vols. 18, 19. Ed. Clifford Ambrose Truesdell. Orell Füssli, Turici [Zürich], 1967, 1972) [E 110, E 111].
- Euler, Leonhard, 1749b. *De vibratione chordarum exercitatio*. *Nova acta erud.* 1749, 512–527 (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 10: *Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes*. Ed. Fritz Stüssi, Henri Favre. Orell Füssli, Turici [Zürich], 1947, p. 50–62) [E 119].
- Euler, Leonhard, 1750. *Sur la vibration des cordes*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 4 (1748), 69–85 (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 10: *Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes*. Ed. Fritz Stüssi, Henri Favre. Orell Füssli, Turici [Zürich], 1947, p. 63–77) [E 140].
- Euler, Leonhard, 1755. *Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli*. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berlin* 9 (1753), 196–222 (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 10: *Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes*. Ed. Fritz Stüssi, Henri Favre. Orell Füssli, Turici [Zürich], 1947, p. 233–254) [E 213].
- Euler, Leonhard, 1862. *Recensio dissertationis de ventis*. In: *Opera postuma mathematica et physica* [...]. Vol. 2. Ed. Paul Heinrich Fuss, Nicolaus Fuss. Petropoli [Saint-Pétersbourg], 1862, p. 793–797 (Leonhard Euler, *Opera omnia*, series II: *Opera mechanica et astronomica*. Vol. 31: *Commentationes mechanicae et astronomicae ad physicam cosmicam pertinentes*. Ed. Eric J. Aiton. Birkhäuser, Basileae, 1996, p. 365–371) [E 851].
- Euler, Leonhard, 1975. *Opera omnia, series IVA: Commercium epistolicum*. Vol. 1: *Descriptio commercii epistolici*. Ed. Adolf P. Juškevič, Vladimir I. Smirnov, Walter Habicht. Birkhäuser, Basileae.

- Euler, Leonhard, 1980. *Opera omnia, series IVA: commercium epistolicum. Vol. 5: commercium cum A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L. Lagrange.* Ed. Adolf P. Juškevič, René Taton. Birkhäuser, Basileae.
- Euler, Leonhard, 1998. *Opera omnia, series IVA: commercium epistolicum. Vol. 2: commercium cum Johanne (I) Bernoulli et Nicolao (I) Bernoulli.* Ed. Emil A. Fellmann, Gleb K. Mikhajlov. Birkhäuser, Basileae.
- Fuss, Paul Heinrich, 1843. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle. Précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits. Vol. 2.* Publiée sous les auspices de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg, Saint-Pétersbourg.
- Guilbaud, Alexandre, Jouve, Guillaume, 2009. *La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscules mathématiques de d'Alembert (1761–1783).* *Rev. Hist. Math.* 15, 59–122.
- Henry, Charles, 1885. *Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, Béguelin, etc.* *Bull. Bibliogr. Stor. Sci. Mat. Fis.* 18, 507–570, 605–649.
- Robins, Benjamin, 1742. *New principles of gunnery: containing the determination of the force of gun-powder, and an investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions.* Printed for J. Nourse, London.
- Szabó, István, 1987. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen, 3. Auflage.* Birkhäuser, Basel/Boston/Stuttgart.
- Taylor, Brook, 1717. *Methodus incrementorum directa et inversa.* Impensis Gulielmi Innys, Londini.
- Thibaudeau, Alphonse Wyatt, 1885. *Catalogue of the collection of autograph letters and historical documents formed between 1865 and 1882 by Alfred Morrison. Vol. 2.* Printed for private circulation, London.
- Truesdell, Clifford Ambrose, 1960. *The rational mechanics of flexible or elastic Bodies 1638–1788.* In: Leonhard Euler, *Opera omnia, series II: Opera mechanica et astronomica. Vol. 11/2.* Orell Füssli, Turici [Zürich].
- Winter, Eduard, 1957. *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin.* Akademie-Verlag, Berlin.