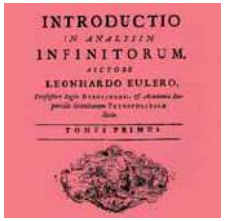
Leonhard Euler

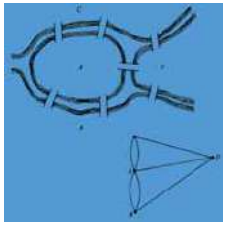
Was hat er uns heute noch zu sagen?

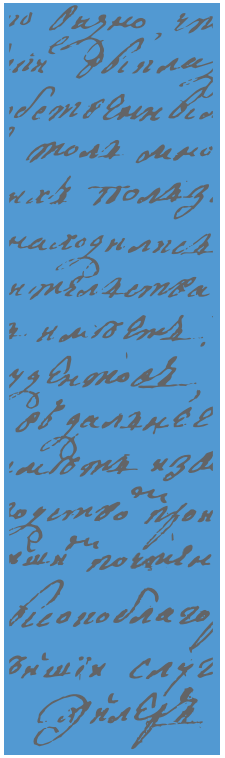
Hanspeter Kraft
Departement Mathematik und Informatik
Universität Basel

SeniorenUni 2020

Universität Basel







International Euler Symposium

University of Basel, Department of Mathematics
Thursday, May 31 (opening at 9:45 am) and Friday, June 1, 2007

Lectures: Alte Universität, Rheinsprung 9/11, CH-4051 Basel

- Pierre Deligne, Institute for Advanced Study, Princeton, USA
- Craig G. Fraser, University of Toronto, Canada
- Stefan Müller, Max-Planck-Institut, Leipzig, Germany
- Alfio Quarteroni, EPFL, Lausanne, Switzerland
- Sir Roger Penrose, University of Oxford, Great Britain
- Karl Rubin, University of California Irvine, USA
- Ronald J. Stern, University of California Irvine, USA
- Anthony Tromba, University of California Santa Cruz, USA
- Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut, Leipzig, Germany
- Günter M. Ziegler, Technische Universität Berlin, Germany

The symposium brings together an international group of first-rank mathematicians whose research builds on themes and results proposed and treated by Euler. In their lectures they will highlight the enduring relevance and emphasize the fundamental importance of Euler's work for 21st-century mathematics.
An evening lecture intended for a general audience will be held at the Museum of Natural History, Augustinergasse 2, on Thursday, May 31st, at 8:15 pm. In this lecture Craig Fraser will outline some topics in Euler's mathematical work from a historical perspective.

For more information see: www.euler-2007.ch

UNI BASEL

FNSNF Swiss National Science Foundation

Swiss Mathematical Society

NOVARTIS

Program

All lectures are in the Alte Universität (Rheinsprung 9/11, CH-4051), except the evening lecture of Craig Fraser which will be held at the Naturhistorisches Museum Basel (Augustinergasse 2).

Thursday, May 31

9:45 - 10:00	Opening
10:00 - 11:00	Karl Rubin: Euler Systems in Number Theory
11:30 - 12:30	Pierre Deligne: Multizeta Values, from the 1740's to now
14:30 - 15:30	Eberhard Zeidler: Euler and the Mathematical Principles of Modern Natural Philosophy
16:30 - 17:30	Stefan Müller: Rigidity, Geometry and Elastica
20:15 - 21:15	Craig Fraser: Leonhard Euler and the History of Mathematics: Changing Perspectives

Friday, June 1

10:00 - 11:00	Ronald J. Stern: Euler, Polyhedron, and Smooth 4-Dimensional Manifolds
11:30 - 12:30	Günter Ziegler: Euler's Polyhedron Formula – at the Starting Point of today's Polytope Theory
14:00 - 15:00	Alfio Quarteroni: Mathematical Modelling for Environment, Medicine, and Sport: Euler's Legacy
15:30 - 16:30	Anthony Tromba: Variations and Singularities
17:00 - 18:00	Roger Penrose: Euler's Profound Influence on Twistor Theory

Prolog: Wissenschaftsgeschichte

Errungenschaften der Frühzeit und Antike

- Pyramiden in Ägypten (Cheops: 150 m hoch, 2500 v. Chr.)
- Chinesische Mauer (20’000 km, Beginn im 7. Jh. v. Chr.)
- Römische Bauten (Forum Romanum 6. Jh. v. Chr., Kolosseum, 1. Jh. v. Chr.)
- Wasserleitungen und Aquädukte (Pont du Gard bei Nîmes, 50 km lang, 1. Jh. n. Chr.)

Fundamentale Kenntnisse in Baustatik und Geometrie, beeindruckende Leistungen in Planung und Logistik.

Aber alles im Kontext der Zeit!

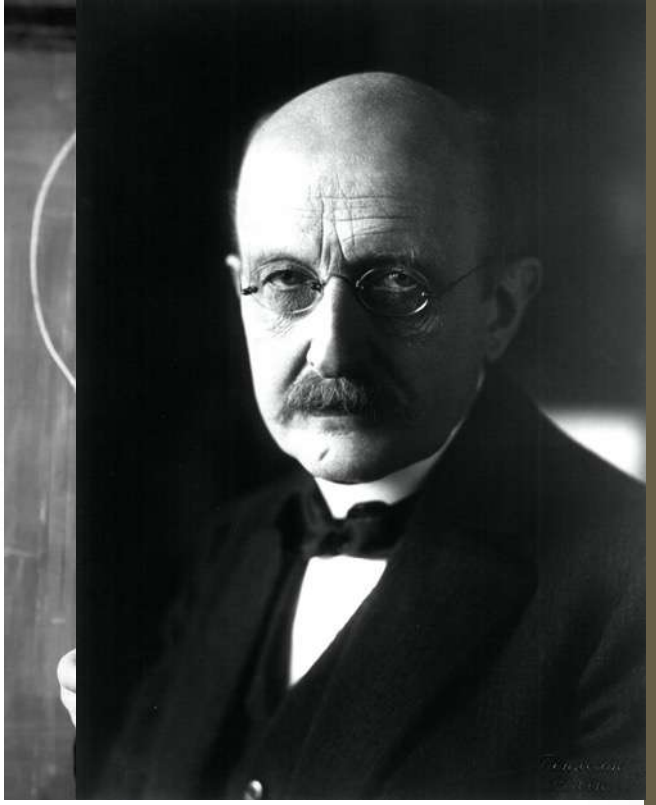
Prolog: «Universalgeleh

- Aristoteles (384-322 v. Chr.)
- Leonardo da Vinci (1442-1519)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Mathematik, Infinitesimalrechnung)
- Isaac Newton (1642-1727, Mechanik, Mathematik, Infinitesimalrechnung, «Prioritätsstreit»)
- Alexander von Humboldt (1769-1859, wissenschaftliche Feldstudien, «grösster Naturforscher seiner Zeit»)

Prolog: Frühzeit


- Pythagoras (um 500 v.Chr., Satz von Pythagoras)
- Euklid von Alexandria (um 300 v.Chr., Elemente)
- Galileo Galilei (1564-1641, Inquisitionsprozess)
- Johann Keppler (1571-1630, Kepplersche Gesetze)
- Leonhard Euler (1707-1783, erster moderner Mathematiker)
- Familie Bernoulli (Jakob, Johann, Nicolaus, Daniel, …)

Prolog: Neuzeit



- James Clerk Maxwell (1831-1879, Elektrodynamik, Maxwell-Gleichungen)
- Marie Curie (1867-1934, Radioaktivität, zwei Nobelpreise)
- Albert Einstein (1879-1955, Relativitätstheorie)
- Max Planck (1858-1947, Quantentheorie)

«Alte Erkenntnisse wurden durch neue Experimente und moderne Techniken überholt und mussten verworfen werden.»

Naturwissenschaften und Mathematik

Gottfried Schatz (Biochemiker): *«Wir Naturwissenschafter wissen nie, ob wir auf dem richtigen Pfad sind!»*

Naturwissenschaften: Der Fortschritt geht einher mit dem technischen Fortschritt und mit der Entwicklung neuer Werkzeuge.

Mathematik: Erkenntnisse und Ergebnisse haben absolute Gültigkeit. Die moderne Forschung ist völlig unabhängig von der technischen Entwicklung.

Computer?

Angewandte Mathematik (Numerik, Statistik): Mathematiker denken darüber nach, wie man Berechnungen durchführt, optimiert und beschleunigt; Entwicklung von Algorithmen; «Computational Mathematics»

Beispiel 1: grosse Primzahlen

Frage: *Ist eine gegebenen grosse Zahl N eine Primzahl?*

Zu zeigen: *Keine Zahl $n < N$ ist ein Teiler von N.*

Teilen mit Rest: *Testet, ob n ein Teiler von N ist.*

Ein Laptop macht das in 10^{-5} =0.00001 Sekunden
(ein Supercomputer in 10^{-14} Sekunden).

Dieser Test muss nun für alle Zahlen $n < N$ durchgeführt werden.
Gesamtdauer für den Primzahltest einer 100-stelligen Zahl N:

sqrt(N) x 10^{-5} Sekunden = 10^{45} Sekunden = 3 x 10^{37} Jahre!

Zum Vergleich: **Alter des Universums = 14 x 10^{9} Jahre**

Wie kommt es, dass mein Laptop diesen Primzahltest in weniger als 1 Sekunde durchführt?

Dahinter stecken geniale Algorithmen, die auf z.T. klassischen Resultaten der Zahlentheorie beruhen!

Beispiel 2: Test einer Formel

Gemeinsame Arbeit mit Frank Grosshans, eben erschienen:
«Covariants, Derivation-Invariant Subsets, and First Integrals»

$$c_{m,r} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (m-r+i)_{r-i} \, (m-r+i+2)_{r-i} \, (m-i+2)_i \, (m-i)_i$$

Zu zeigen: *Für alle positiven ganzen Zahlen m und $s < m$ ist der Koeffizient $c_{m,2s}$ nicht Null.*

Computeralgebra-Programm **Mathematica** lieferte geschlossene Formel!

$$c_{m,2s} = (-1)^s (2s)! (s!)^2 \binom{m-1}{s} \binom{m+1}{s} \binom{2m-s}{s} \neq 0.$$

Das ist aber kein Beweis!

Wer war Leonhard Euler?

- Ein wohlbekannter Basler?
- Ein weltberühmter Auslandschweizer?
- Der grösste Gelehrte seiner Zeit?
- Der führende Wissenschaftler des 18. Jahrhunderts?
- Einer der genialsten und produktivsten Mathematiker aller Zeiten?

oder

Der Mann mit der Nachthaube?

Der Mann auf der alten Zehnernote?

Der Mann auf der Briefmarke?

Der Auslandschweizer

1707 in Basel geboren (15. April)

1727 Basel → St. Petersburg

1741 St. Petersburg → Berlin

1766 Berlin → St. Petersburg

1783 in St. Petersburg verstorben (18. September)

«Er blieb seiner Vaterstadt immer eng verbunden, ist aber nie dahin zurückgekehrt.»

Der Gelehrte und Wissenschaftler

Fundamentale Beiträge zur Mathematik, Optik, Mechanik, Astronomie und Technik

Über 800 wissenschaftliche Arbeiten, etwa 3000 Briefe von und an Euler und rund 30’000 Manuskriptseiten

Opera Omnia: 74 Werkbände (Series I-III) und 9 Briefbände (Series IVA)

Philosophische und theologische Beiträge, sowie mehrere Schriften zur Musiktheorie

Als Mathematiker mit vielen originellen Ansätzen und grundlegend neuen Ideen

«Euler hat die Mathematik von Grund auf revolutioniert!»

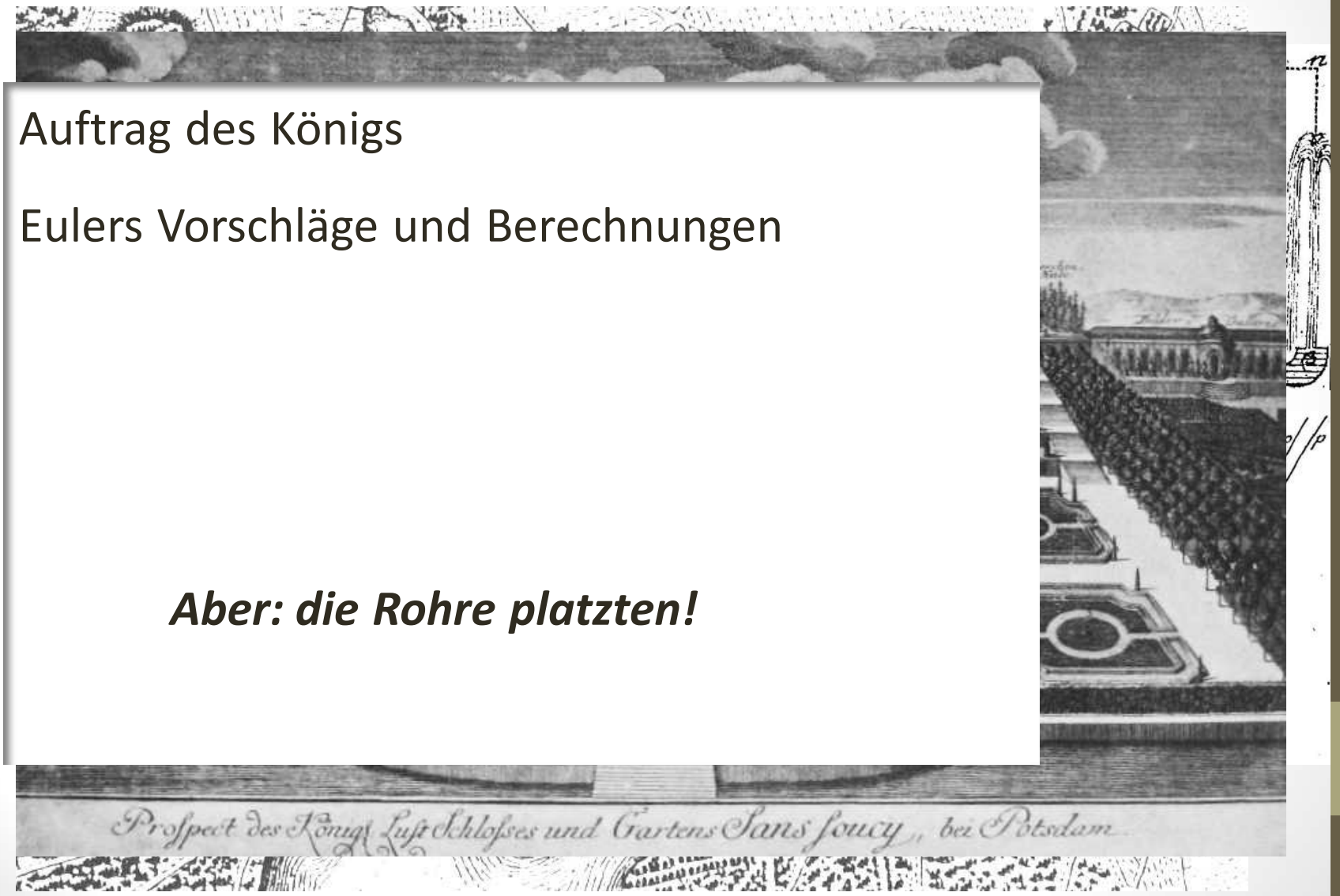
METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

Titelseite von Leonhard Eulers «Variationsrechnung», Lausanne und Genf 1744

Wasserkunst in Sanssouci



Auftrag des Königs

Eulers Vorschläge und Berechnungen

Aber: die Rohre platzten!

Der Spott des Königs

«Je voulus faire un jet-d'eau en mon Jardin; le Ciclope Euler calcula l'éffort des roües, pour faire monter l'eau dans un bassin d'où elle devoit retomber par des canaux, afin de jaillir à Sans-Souci. Mon Moulin a été éxécuté géométriquement, et il n'a pu élever une goute d'eau à cinquante pas du Bassin. Vanité des Vanités; Vanité de la géométrie.»

Friedrich II an Voltaire, 25. Januar 1778

„ ... zweitklassig als Physiker ...?”

„The physical universe was an occasion for mathematics to Euler, scarcely a thing of much interest in itself; and if the universe failed to fit his analysis it was the universe which was in error.”
(E. T. Bell 1937)

„Der geniale Mathematiker Euler war zweitklassig als Physiker ...”
(A. Hermann 1991)

„When Euler applied his equations to design a fountain for Frederick the Great of Prussia, it failed to work ... Unfortunately, he omitted the effects of friction, with embarrassing practical consequences.”
(S. Perkovitz 1999)

Heinrich Ludewig Manger's
Königl. Preuß. Ober-Hof-Baurath und Garteninspectors

Baugeschichte

von

Potsdam,

besonders
unter der Regierung

König Friedrichs des Zweiten.

Erster Band,
welcher die Baugeschichte von den ältesten Zeiten bis 1762 enthält.

Berlin und Stettin,
bei Friedrich Nicolai, 1789.

vier bleyerne Grouppen, sechsfüßiger Proportion; Diese goß überdieß die metallenen Cylinder, oder Stiefel zur Mühle und verschiedene Arbeiten von Bley, weil er im Gießen sehr geschickt war. 1748

Die hölzernen gebohrten Röhren mit den eisernen Schraubenringen waren nun endlich auch verlegt, erfuhren aber ebenfalls gar bald das Schicksal der vorigen aus verschiedenen Stäben zusammengesetzten, nämlich sie konnten den Druck des Wassers nicht aushalten und zersprangen. Dem Könige mußte also vorgestellet werden, daß auf keine Weise das Wasser anders herauf in den Sammelkasten zu bringen möglich wäre, als wenn solches vermittelst guter gegossenen eisernen, oder bleyernen Röhren geschähe, wozu denn dergleichen von Caffel und vom Harze vorgeschlagen wurden.

Es konnte nicht anders seyn, als daß der König wegen der durch zweierley hölzernen Röhren verwendeten, gleichsam weggeworfenen Summen, sehr unwillig ward, denn er verlangte durchaus und mit Recht, daß diejenigen, welche etwas angäben, vorher von dem Effekte durch Erfahrungen sicher seyn müßten. Er äusserte indessen den gerechten Unwillen nicht auf eine strenge Art, sondern da er von neuem zu eisernen Röhren Gelder assignirt hatte: so ließ er ein Paar Esel in Lebensgröße mit Oelfarbe auf Leinwand mahlen, mit Rähmen umgeben, und die Unterschrift beifügen:

Hollaandse Fontaenen-Maacker.

Diese recht schön, und gänzlich nach der Natur getroffenen Thiere, sollten mit Wasserfarbe, etwas anders vorstellend übermahlt, und an ein

Eulers Warnungen!

„Car sur le pied qu'elles se trouvent actuellement, il est bien certain, qu'on n'éleveroit jamais une goutte d'eau jusqu'au réservoir, et toute la force ne seroit employée qu'à la destruction de la machine et des tuyaux.“

(Euler an Friedrich II, 17. Oktober 1749)

„La véritable cause de ce fâcheux accident consistoit uniquement en ce que la capacité des pompes étoit trop grande, et à moins qu'on ne la diminue très considérablement, ou en diminuant leur diamètre ou leur hauteur, ou le nombre des jeux qui repond à un tour de moulin, la machine ne sera pas en état de fournir une seule goûte d'eau dans le réservoir.“

(Euler an Maupertuis, 21. Oktober 1749)

Fazit

Eulers Analyse des Sanssouci-Problems war korrekt. Sie begründete die moderne Hydraulik.

Die daraus abgeleiteten praktischen Regeln wurden ignoriert.

Das Wasserkunst-Projekt in Sanssouci scheiterte, weil der König unfähige Praktiker pfuschen liess und vor den hohen Ausgaben zurückschreckte.

Eulers Hydrodynamik beruhte auf jahrelanger Erfahrung mit praktischen Problem wie dem in Sanssouci.

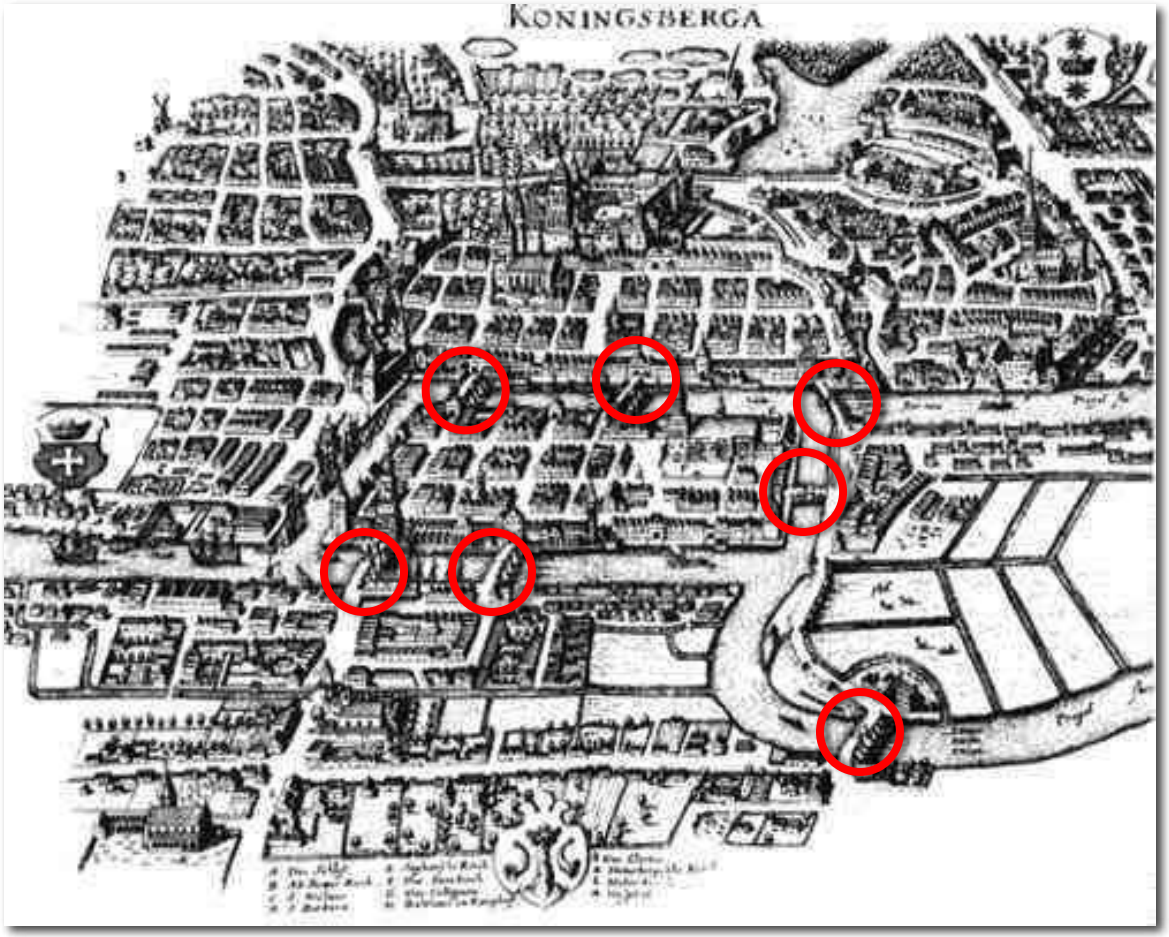
Eulers Mathematik
Drei Beispiele

Das Königsberger Brückenproblem

Die Eulersche Polyederformel $e - k + f = 2$

Der Eulersche Satz $x^{\varphi(n)} = 1 \mod n$

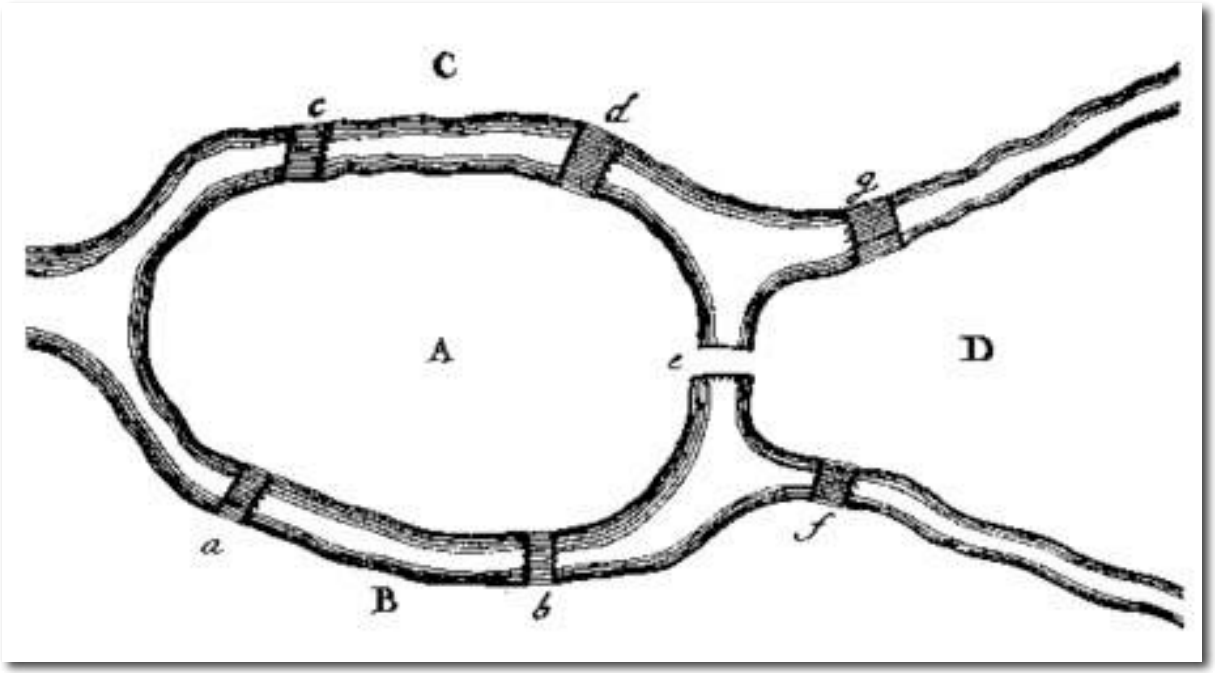
Das Königsberger Brückenproblem



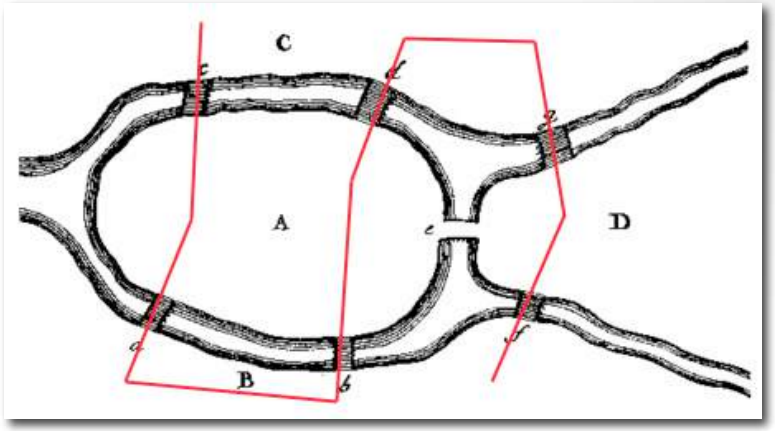
Königsberg (Kaliningrad) am Pregel, mit den 7 Brücken

Frage

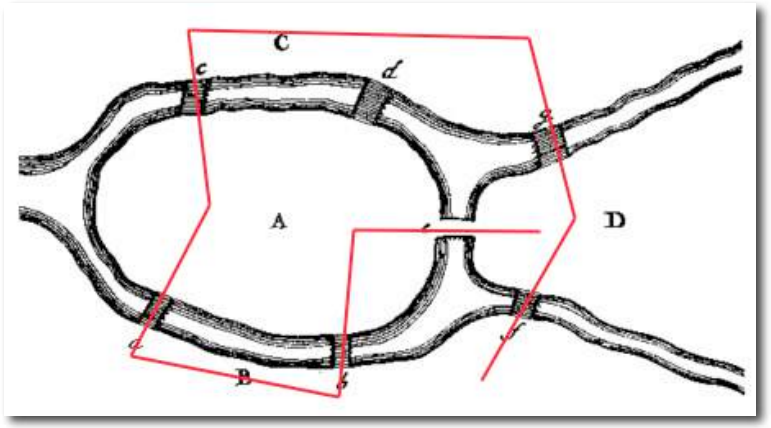
Gibt es einen Spaziergang durch Königsberg, bei dem man jede der 7 Brücken genau einmal überschreitet?



Erster Versuch:



Zweiter Versuch:

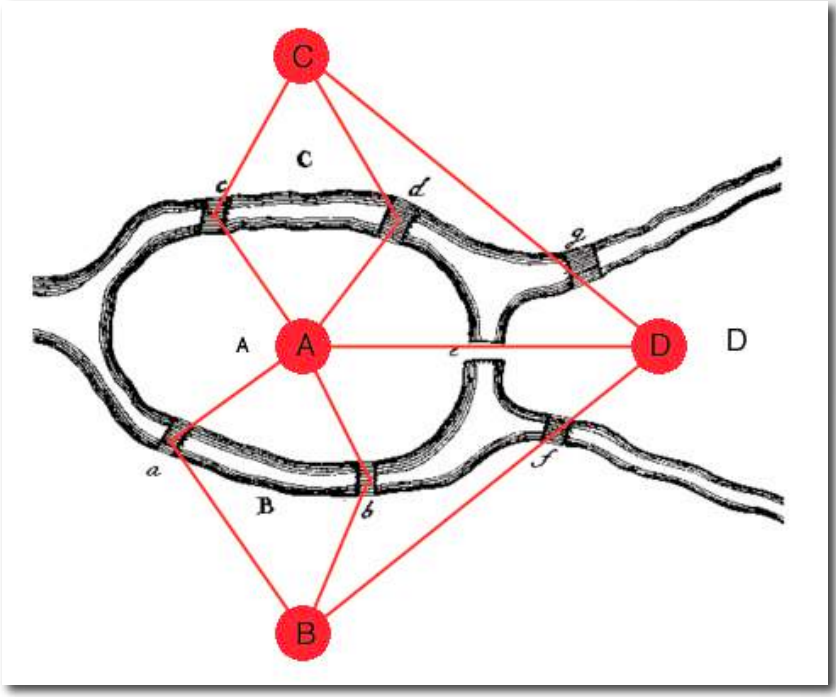


«Es scheint nicht zu gehen! Aber warum nicht und wie sieht man das ein?»

Graphentheorie

Definition

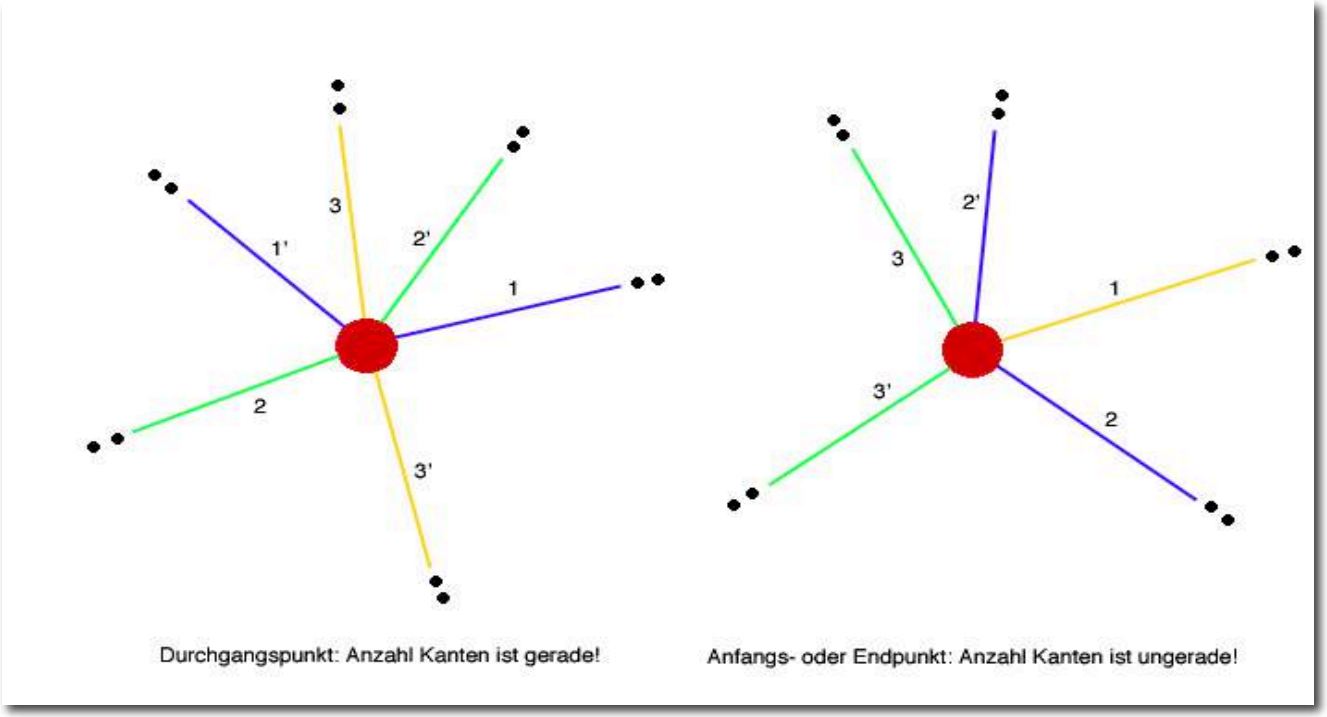
Ein *Graph* besteht aus Punkten (= Ecken), die durch Strecken (= Kanten) verbunden sind.



Allgemeines Problem

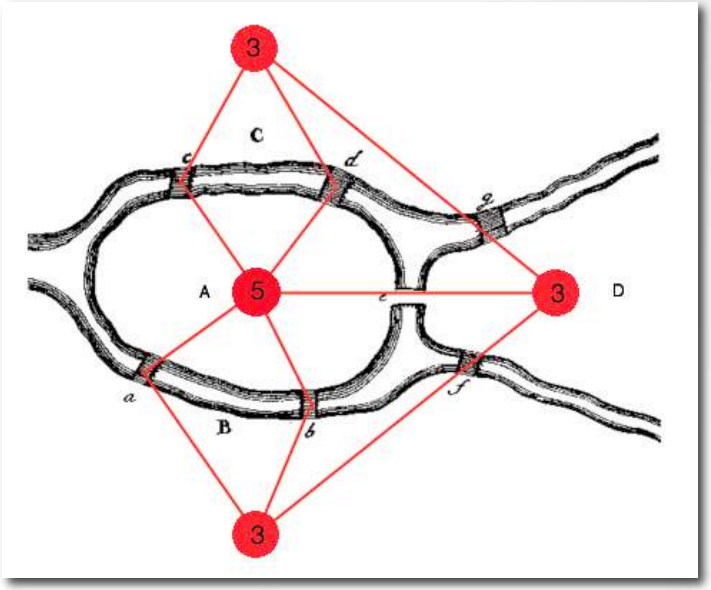
Gegeben ein beliebiger Graph. *Gibt es einen Weg durch diesen Graphen, der jede Kante genau einmal benutzt?*

Was passiert bei einem solchen Spaziergang?



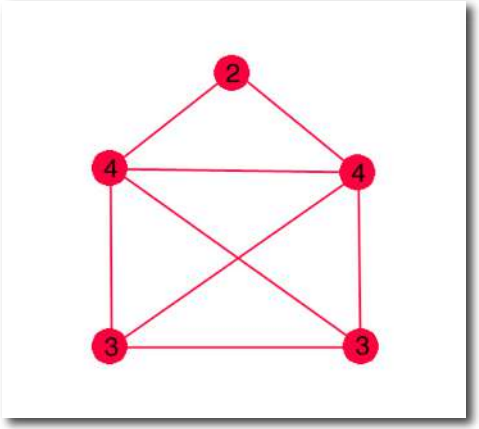
Notwendige Bedingung („Valenzbedingung“): *Die Anzahl der von einer Ecke ausgehenden Kanten ist gerade, eventuell mit genau zwei Ausnahmen.*

Königsberger Brückengraph

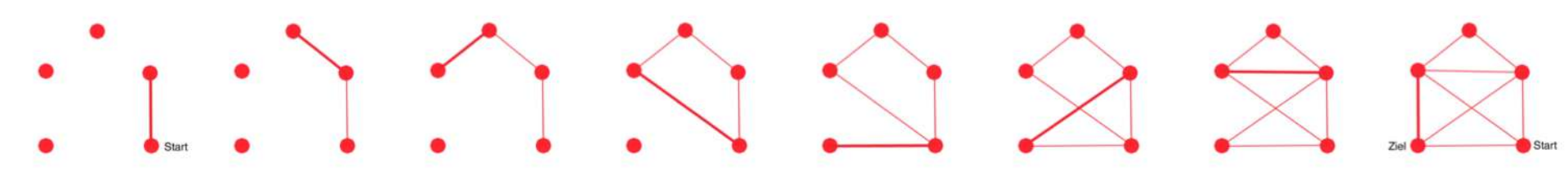


Erfüllt die notwendige Valenz-bedingung nicht! ☛ Es gibt daher keinen solchen Spaziergang!

Satz von Euler: *Valenzbedingung ist auch hinreichend, um einen solchen Spaziergang zu finden!*



Beispiel: Das Nikolaushaus



Anwendungen der Graphentheorie

- Transportprobleme
- Navigationssysteme
- Ökonomie (optimale Verteilungen)
- Bau von Mikrochips
- usw.

Zusammenfassung

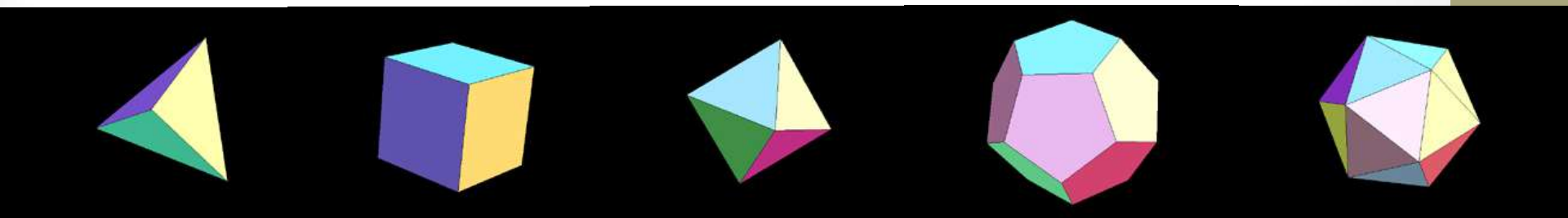
- Ausgangspunkt: ein praktisches Problem
- Ansatz: Abstraktion (Reduktion auf das Wesentliche)
  ☛ Graphen
- Verallgemeinerung der Fragestellung ☛ Lösung
- Weiterentwicklung ☛ Graphentheorie

Neue, unvorhergesehene und überraschende Anwendungen!

Die Polyederformel: $e - k + f = 2$

Polyeder oder Vielflächner: konvexer Körper, der durch Vielecke begrenzt ist.

Eulersche Formel:
e = Anzahl Ecken, k = Anzahl Kanten, f = Anzahl Flächen



SCHOLION.

27. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonstratum, simul illius veritas sit edicta, tamen ex problemate praemisso etiam alterius Theorematis demonstratio confici potest sequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

28. *In omni solido hedris planis incluso numerus hedrarum una cum numero angularum solidorum, binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in solido quocunque proposito:
numerus angulorum solidorum $= S$
numerus hedrarum $= H$
numerus acierum $= A$
atque ante vidimus, si resectione vnius anguli solidi numerus S vnitate minuatur, vt sit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram esse $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutatione,

si numerus angulorum solidorum sit,	Excessus numeri acierum super numerum hedrarum erit:
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
:	:
:	:
$S - n$	$A - H - n$

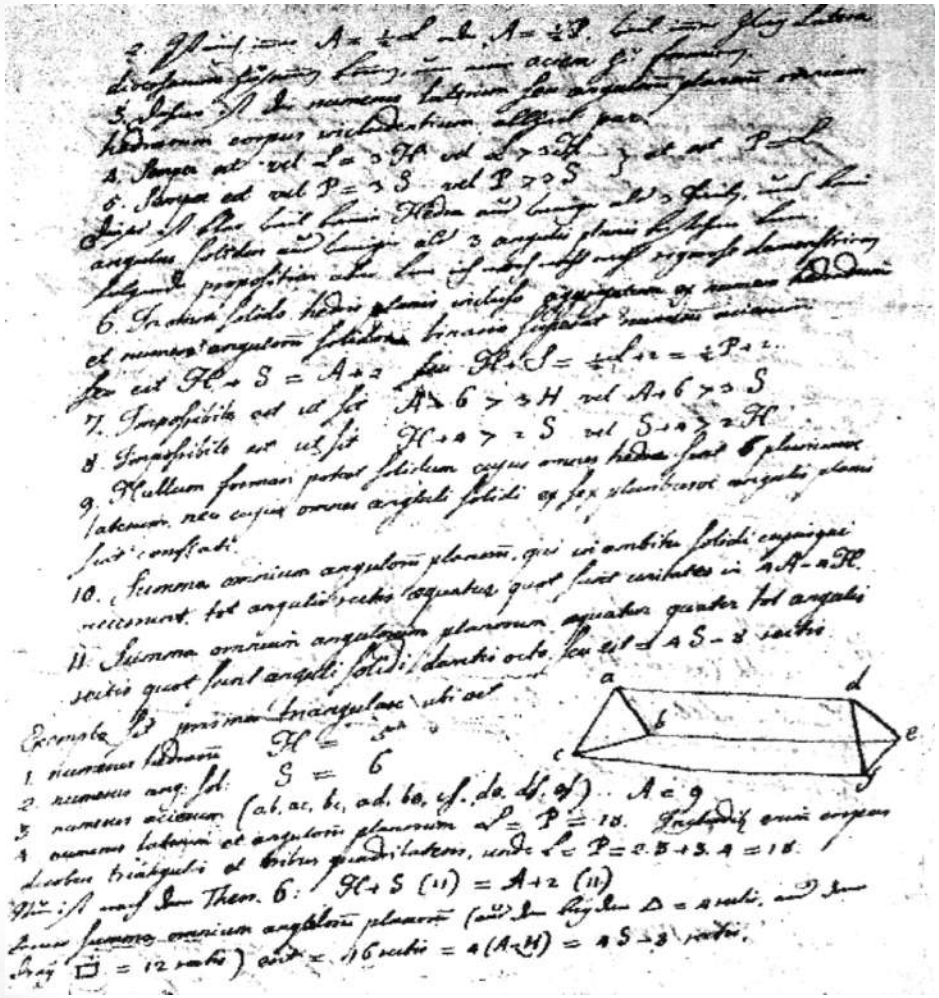
Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum solidorum est $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt excessus numeri acierum supra numerum hedrarum futurus sit $= 2$; euidens est, si fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo est $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; sicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, seu $H + S = A + 2$; vnde constat, in omni solido hedris planis incluso numerum hedrarum H vna cum numero angulorum solidorum S binario superare numerum acierum A. Q. E. D.

$$H + S = A + 2$$

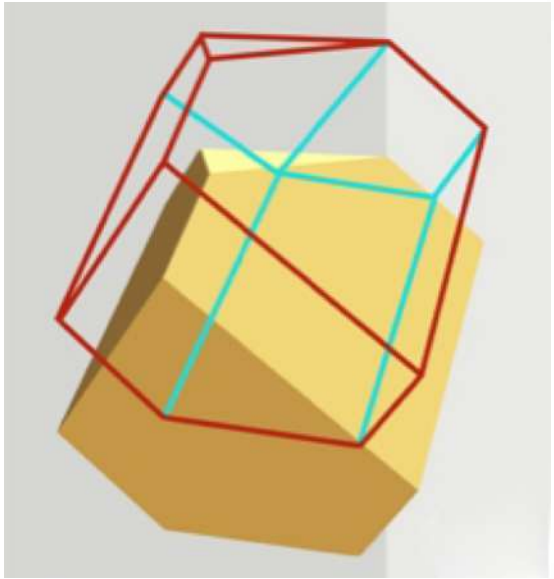
S = numerus angulorum solidorum
H = numerus hedrarum
A = numerus acierum

Unregelmässige Polyeder



Brief an Christian Goldbach (1750):

$H + S = A + 2$



1 Dreieck, 5 Vierecke, 3 Fünfecke

$e = 12,\ k = 19,\ f = 9$

☛ $e - k + f = 2$

Der Fussball

Klassischer Fussball:
Pentakisdodekaeder mit
12 Fünfecken und
20 Sechsecken

$e = 60 = (60 + 120)/3$
$k = 90 = (60 + 120)/2$
$f = 32 = 12 + 20$

☛ $e - k + f = 2$

Was ist daran so erstaunlich?

- Sehr einfache Aussage, leicht nachprüfbar
- Universelle Gültigkeit
- Geniale Intuition
- Ungeahnte Auswirkungen:
  Basis der „algebraischen Topologie”

«Ein zentraler Forschungsbereich der modernen Mathematik beruht auf einer genialen Idee Eulers!»

Der Eulersche Satz: $x^{\varphi(n)} = 1 \bmod n$

- Elementare Zahlentheorie, geht auf **Fermat** zurück:
  $x^p = x \bmod p$
- Anspruchsvolle Spielerei?
- **Fermatsche Vermutung**:
  $x^n + y^n = z^n$
  ist unlösbar in ganzen Zahlen x,y,z >0 für n>2.

  ☛ Entwicklung der modernen Zahlentheorie
- Nützlichkeit? Anwendungen?

Daniel Bernoulli an Nicolaus Fuss

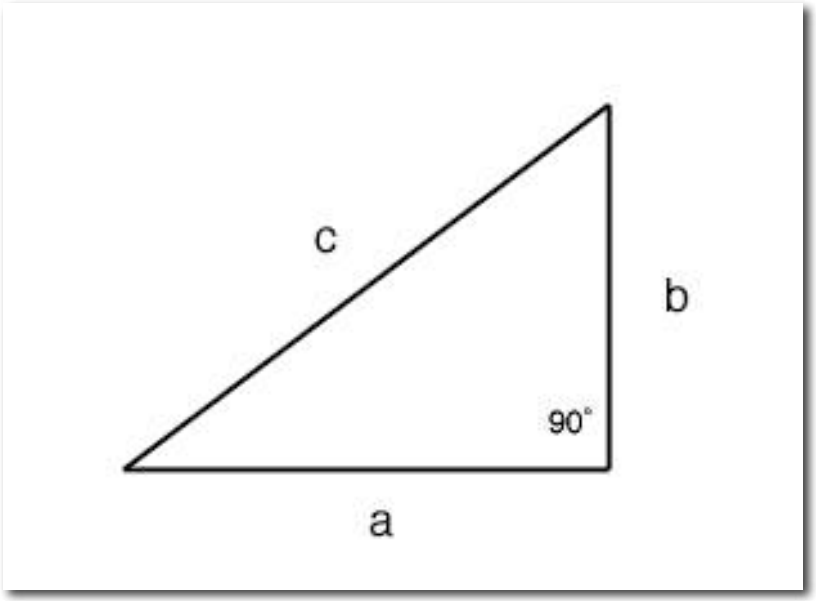
(Brief vom 18. März 1776)

« Ce que vous me dites ... est sans doute infiniment sublime; je veux parler du beau théorème de M. Euler sur les nombres premiers et de sa nouvelle méthode pour examiner tel nombre qu'on propose, quelque grand qu'il puisse être, s'il est premier, ou non. Ce que vous vous êtes donné la peine de me dire sur cette matière m'a paru fort subtil et digne de notre grand maître. Mais ne trouvez vous pas que c'est presque faire trop d'honneur aux nombres premiers que d'y répandre tant de richesses, et ne doit-on aucun égard au goût raffiné de notre siècle? Je ne laisse pas de rendre justice à tout ce qui sort de votre plume et d'admirer vos grandes ressources pour surmonter les difficultés les plus épineuses, mais cette admiration se redouble quand le sujet peut mener à des connoissances utiles. »

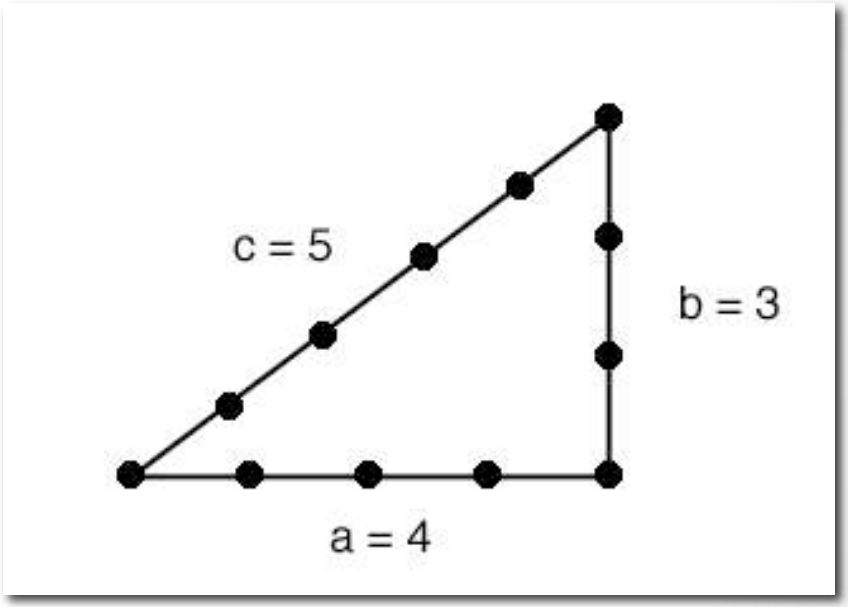
Daniel Bernoulli
8. Februar 1700 – 17. März 1782

Pythagoras!

$a^2 + b^2 = c^2$



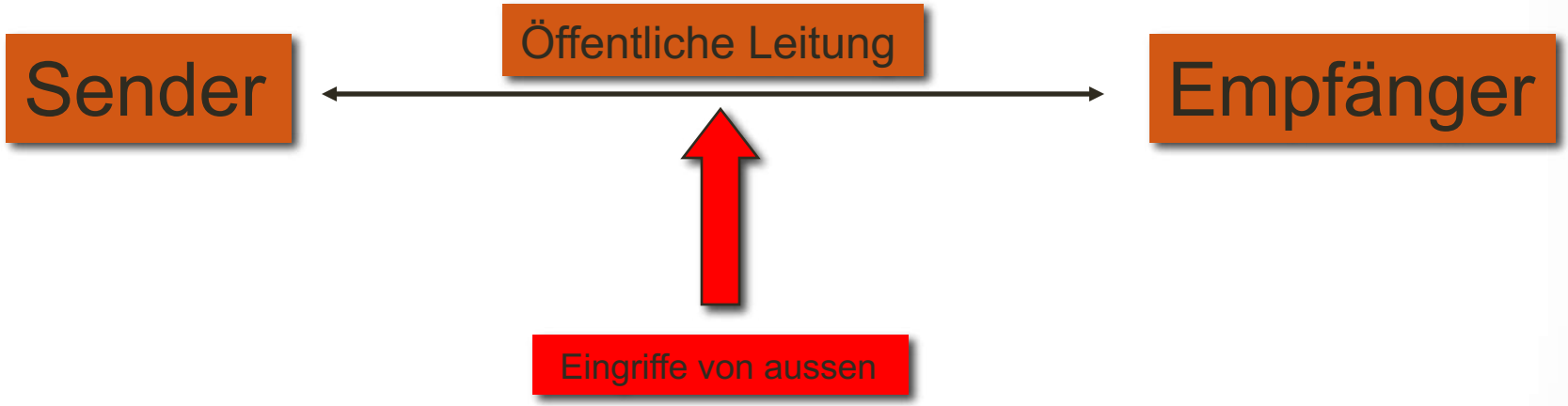
Ganzzahlige Lösungen?



$4^2 + 3^2 = 5^2$

☛ *Landvermessung im alten Ägypten!*
«Zwölfknotenschnüre»

Exkurs:
Internet und öffentliche Netzwerke



Man muss davon ausgehen, dass die Leitung öffentlich ist und dass alle verwendeten Geräte und Verfahren bekannt sind.

Probleme von „öffentlichen” Netzwerken

Vertraulichkeit und Sicherheit

- *Geheimhaltung (Abhören)*
- *Authentifizierung*
- *Eindringen („Hacken”)*

Schutzmassnahmen

Klassisch:
Kuriere, eingeschriebene Sendungen, Unterschrift, Ausweis, usw.

Digital:
- Geheimhaltung durch Verschlüsselung (Chiffrierung)
- Authentifizierung durch digitale Unterschrift

Für die digitalen Methoden braucht es **Passwörter**!

- Persönliche Passwörter
- Streichlisten (einmaliger Gebrauch)
- Kartenleser
- SMS-Kode
- 3-D Secure für Onlinezahlungen (Smartphone mit Transakt-App)
- usw.

Digitale Verschlüsselung (Chiffrierung)

Es gibt absolut sichere Chiffrierverfahren!

- Gemeinsamer geheimer „Schlüssel” für Sender und Empfänger

- Regelmässige Änderung des Schlüssels

Problem:
Schlüsselverwaltung und Schlüsselaustausch (viele Partner!)

„Öffentliche Geheimhaltung“

Public Key Cryptography

Öffentlicher Schlüsseltausch (W. Diffie und M.E. Hellman, Stanford University 1976):

Austausch eines geheimen Schlüssels über eine öffentliche Leitung

RSA-Kryptosystem (R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman 1977):

Chiffrierung mit Hilfe eines öffentlichen Schlüssels, Dechiffrierung nur mit geheimem Schlüssel möglich

Beide Systeme verwenden Methoden der elementaren Zahlentheorie und sogenannte **«Einweg-Funktionen»**.

- Diffie-Hellman: Potenzieren versus diskreter Logarithmus
- RSA: Produkt grosser Primzahlen + Euler-Formel

«Alles Themen aus Eulers Forschung!»

Anwendungen

Diffie-Hellman Key Exchange

- E-Commerce, online Zahlungen
- E-Banking
- E-Voting (elektronische Abstimmungen)

RSA-Kryptosystem

- E-Mail (PGP-Algorithmus)
- Übermittlung von Passwörtern
- Digitale Unterschrift
- Signieren von elektronischen Dokumenten

Zusammenfassung

- Kryptographie und Kodierungstheorie: Basis für den sicheren Datenaustausch
- Beruhen auf Methoden der elementaren Zahlentheorie
- Eulers Forschung (z.B. Eulersche Formel) spielt dabei eine wichtige Rolle

«Eine Entdeckung der elementaren Zahlentheorie findet 250 Jahre später eine unerwartete Anwendung, die heute im täglichen Leben eine zentrale Rolle spielt!»

Bemerkungen

- Diffie und Hellman waren nicht die ersten!

  (Britischer Geheimdienst: J. Ellis, C. Cocks, M. Williamson kannten die Methode schon 1970!)

- Quantum-Computing (viel schnellere Algorithmen!)

Die Testfrage

Was würden Sie ohne Euler und die Mathematik tun?

Barzahlen!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit