LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER · LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER · HEINRICH BRANDT
ERNST TROST · CHARLES BLANC

SERIES PRIMA · OPERA MATHEMATICA · VOLUMEN VICESIMUM QUINTUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD CALCULUM VARIATIONUM PERTINENTES

EDIDIT

CONSTANTIN CARATHÉODORY

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BERNAE MCMLII

VENDITIONI EXPONUNT
ORELL FÜSSLI TURICI

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER
HEINRICH BRANDT
ERNST TROST
CHARLES BLANC

SERIES PRIMA

OPERA MATHEMATICA

VOLUMEN VICESIMUM QUINTUM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BERNAE MCMLII

VENDITIONI EXPONUNT
ORELL FÜSSLI TURICI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD CALCULUM VARIATIONUM PERTINENTES

EDIDIT

CONSTANTIN CARATHÉODORY

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BERNAE MCMLII

VENDITIONI EXPONUNT
ORELL FÜSSLI TURICI

TYPIS EXCUSSIT ORELL FÜSSLI TURICI

VORWORT

Auch für diesen zweiten Band der Arbeiten zur Variationsrechnung sind wir der Stiftung der Schweizerischen Landesausstellung 1939 Zürich für Kunst und Wissenschaft zu großem Dank verpflichtet, da sie uns die Drucklegung durch die Schenkung einer das Defizit deckenden Summe ermöglicht hat. Wir freuen uns, daß wir immer noch Gönner finden, und haben allen Anlaß, zu hoffen, daß wir das Unternehmen in rascherem Tempo zu Ende führen können.

Die treffliche Übersicht, die CARATHEODORY den EULERschen Arbeiten zur Variationsrechnung gewidmet hat und die am Anfang des vorigen Bandes abgedruckt ist, bedarf für einige Abhandlungen noch einer Ergänzung.

Wir beginnen mit E 9

De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente

G. ENESTROEM hat in einer Notiz der Bibliotheca mathematica 1899 unter dem Titel „*Sur la découverte de l'équation des lignes géodésiques*" nachgewiesen, daß diese Arbeit nicht im November 1728 verfaßt ist, sondern erst einige Monate später. Der Brief von JOHANN BERNOULLI, den EULER zu Beginn der Arbeit erwähnt, stammt vom 10. Dezember 1728. Wir drucken im folgenden eine erste Fassung der Arbeit ab, deren Manuskript sich heute in Moskau befindet, von dem wir jedoch eine Photographie besitzen. Vom Paragraphen 14 ab wirkt diese Arbeit wie ein unmittelbarer Fundbericht, und man sieht EULERS Entdeckungen zu. Dieselben Formeln, in etwas gereifterer Gestalt, finden sich wieder in EULERS Brief vom 18. Februar 1729 an JOHANN BERNOULLI, so daß die erste Fassung zweifellos kurz vor dem Datum des Briefes beendet wurde. Von der Formel am Schluß des Paragraphen 18 berichtet EULER im genannten Brief: „cuius integratio me diu torsit, tandem vero sic obtinui", worauf der Inhalt von § 19 folgt.

JOHANN BERNOULLI antwortete unter dem 18. April 1729, und am Schluß heißt es: „Tenta num possis problema de ducenda linea brevissima reducere ad aequationem differentialem primi gradus in superficie aliqua, quae non sit vel cylindroïca vel conoidica, sed alia aliqua". Darauf bezieht sich der Schlußsatz in EULERS Abhandlung (Seite 12 dieses Bandes), so daß also diese endgültige Abhandlung nicht vor dem Mai 1729 abgeschlossen sein kann. Nebenbei sei noch bemerkt, daß BERNOULLI in diesem Brief EULER mitteilt, die Schmiegungsebenen der geodätischen Linien seien zur Tangentialebene senkrecht, und ihm ferner das Problem stellt, er solle die Kurven suchen, deren Schmiegungsebenen mit den Tangentialebenen einen konstanten Winkel einschließen. EULER erwähnt in seiner

Antwort vom 16. Mai 1729 diese letzteren Probleme nicht, so daß man vermuten kann, er habe noch nichts von den Ebenen, die durch drei aufeinanderfolgende Punkte einer Kurve gehen, gehört.

Doch nun soll die erste Fassung der Arbeit folgen. Ihr Inhalt ist, soweit er nicht durch die späteren Paragraphen jeweils überflüssig wurde, ganz in die definitive Fassung übergegangen. Das nach den obigen Ausführungen sicher falsche Datum am Anfang rührt nicht von EULERS Hand her.

DE LINEA BREVISSIMA QUAE IN SUPERFICIE QUACUNQUE A DATO PUNCTO AD ALIUD DUCI POTEST

Novemb. d. 9. 1728

1. Propositum hic est methodum exhibere, qua in superficie quacunque sive convexa sive concava, a puncto dato ad aliud linea possit duci brevissima; sive eam lineam determinare, quam filum in iis punctis firmatum et tensum format. Facile enim a quolibet concedetur filum tensum brevissimam exhibere lineam inter duo puncta. Dat quidem etiam viam maximam, sed hoc nihil impedit, cum methodus minima inveniendi maxima quoque monstret. Proposuit mihi problema hoc Cel. JOH. BERNOULLI, significans se generalem invenisse aequationem pro hac linea in superficie quacunque.

2. Ad hoc efficiendum necesse est naturam superficierum aequationibus exponere, quemadmodum lineae curvae aequationibus indicantur, id quod commodissime eo praestabitur modo, quo a Cel. HERMANNO factum esse vidi, qui superficies exprimit aequationibus tribus variabilibus constantibus. Quem secutus voco variabilem in axe pro lubitu assumpto t, normalem ad hanc in plano horizontali x et perpendiculum in fine huius verticaliter erectum, donec superficiem attingat, y. (Confer Fig. 1 p. 2.) Data ergo aequatione inter t, x et y, pro t et x successive omnibus possibilibus valoribus substituendis, y omnia puncta superficiei indicabit. Exempli gratia: Pro sphaera diametrum loco axis accipiendo et abscissas t a centro sumendo haec habebitur aequatio

$$tt + xx + yy = aa \ .$$

3. Ut curva in superficie quacunque ducta minima sit omnium eosdem terminos habentium, oportet ut eius elementa duo contigua intra suos terminos ita sint comparata, ut eorum summa sit minima. Nisi hoc enim esset, tota linea brevior esse posset, id quod esset contra hypothesin. Ex hac contemplatione obtinebitur aequatio, cuius beneficio aequatio pro superficie ita reducetur, ut abeat variabilis y et ita habeatur aequatio pro

curva in plano horizontali, quae erit proiectio curvae brevissimae quaesitae, sive erectis ex eius curvae punctis singulis verticalibus, hae ad superficiem productae in ea depingent lineam brevissimam.

4. Ad determinandam positionem duorum elementorum viam intra suos terminos brevissimam constituentium sequens promitto lemma. Sint duo puncta fixa G et H et curva interposita IK (Confer Fig. 2 p. 3). Quaeritur punctum M in ea, tale ut via $GM + MH$ sit omnium possibilium, quae super curvam IK incedunt, minima. Solutio. Ut GMH sit minimum quoddam, oportet ut sumto ipsi M puncto proximo m sit $GmH = GMH$, unde locus M in curva IK cognoscetur, sed hoc analytice persequor.

5. Demissis ex G, H, M et m ad planum horizontale perpendiculis GE, HF, MP et mp, producatur pP in C et ei iungatur normalis AC, in plano horizontali instar axis habenda, ad quam perpendiculares ducantur EB et FD. Sint BC et CD aequales et dicantur

$$BC = CD = a\,, \quad BE = b\,, \quad EG = c\,, \quad DF = f\,, \quad FH = g \text{ et } CP = x\,, \quad PM = y\,.$$

Erunt $Cp = x + dx$ et $pm = y + dy$. Hinc erit

$$GM = \sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2} \quad \text{et} \quad MH = \sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}\,.$$

Cum $GM + MH$ debeat esse maximum, oportet ut eius differentiale sit $= 0$. Erit igitur

$$\frac{(x-b)\,dx + (y-c)\,dy}{\sqrt{aa + (x-b)^2 + (y-c)^3}} = \frac{(f-x)\,dx + (g-y)\,dy}{\sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}}\,.$$

6. Sed cum curva IK supponatur data, sit aequatio pro ea $Pdx = Qdy$, unde $dx : dy = Q : P$. Substitutis his valoribus loco dx et dy haec habebitur aequatio naturam minimi exprimens

$$\frac{(x-b)\,Q + (y-c)\,P}{\sqrt{aa + (x-b)^2 + (y-c)^2}} = \frac{(f-x)\,Q + (g-y)\,P}{\sqrt{aa + (f-x)^2 + (g-y)^2}}\,.$$

Ex hac aequatione eruetur natura minimi pro duobus elementis in superficie substituendo loco a, f, g, b etc. debitis valoribus in x et y.

7. Sit $AC = t$, $BC = CD = dt = a$, $DF = x + dx = f$

$$FH = y + dy = g\,, \quad BE = x - dx + ddx = b\,, \quad EG = y - dy + ddy = c\,.$$

Ut obtineantur P et Q, oportet, ut aequatio pro superficie inter t, x et y differentietur, posito t constante, ut nonnisi curvae IK natuta cognoscatur. Seu si aequatio inter t, x

et y fuerit differentialis, ponatur $dt = 0$. Sit igitur aequatio ea $Pdx = Qdy + Rdt$, posito $dt = 0$ erit $Pdx = Qdy$, ut supra assumtum erat, manent ergo P et Q.

8. Substituantur loco a, b, c, f, g valores, erit

$$\frac{Qdx + Pdy}{\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}} = \frac{Qdx + Pdy - Qddx - Pddy}{\sqrt{dt^2 + (dx - ddx)^2 + (dy - ddy)^2}},$$

ergo[1])

$$(Qdx + Pdy)\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} - \frac{(Qdx + Pdy)(dxddx + dyddy)}{\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}}$$

$$= (Qdx + Pdy)\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} - (Qddx + Pddy)\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

unde

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

seu

$$Qdt^2ddx + Qdy^2ddx + Pdt^2ddy + Pdx^2ddy = Qdxdyddy + Pdxdyddx .$$

Substituatur loco Pdx, $Qdy + Rdt$ et loco Qdy, $Pdx - Rdt$, habebitur

$$Rdtdyddx - Rdtdxddy = Qdt^2ddx + Pdt^2ddy$$

et diviso per dt erit

$$Rdyddx - Rdxddy = Qdtddx + Pdtddy .$$

Quae est formula generalis, quae cum aequatione $Pdx = Qdy + Rdt$ coniuncta exprimit lineam brevissimam in superficie data, in qua P, Q, R ex aequatione data determinentur, ut in sphaera abscissis t a centro computatis erit $tt + xx + yy = aa$ seu $tdt + xdx + ydy = 0$, ubi $P = x$, $Q = -y$ et $R = -t$. Notandum est dt pro constante accipi.

9. Pro solidis rotundis, quae conversione alicuius curvae circa axem generantur, quia quaelibet sectio transversa ut IK est circulus, haec erit aequatio $xdx = -ydy + Rdt$, ubi ergo $P = x$ et $Q = -y$. Prima igitur aequatio in hanc abibit factis substitutionibus

$$\frac{xddy - yddx}{xdy - ydx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

quae integrabilis est et in hanc mutatur

$$l(xdy - ydx) = \tfrac{1}{2}l(dt^2 + dx^2 + dy^2) + la ,$$

1) Confer § 16 p. 5 huius voluminis. A. S.

ergo

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

seu

$$(xx - aa)\,dy^2 + (yy - aa)\,dx^2 = aadt^2 + 2xydxdy\ .$$

10. Exempli gratia sit solidum rotundum (confer Fig. 5, p. 11) sphaera, ad quam aequatio haec est:

$$tt + xx + yy = bb \quad \text{et} \quad xdx = -ydy - tdt, \quad \text{ubi} \quad R = -t\ ;$$

est dein

$$y = \sqrt{bb - tt - xx} \quad \text{et} \quad dy = \frac{-tdt - xdx}{\sqrt{bb - tt - xx}}\ .$$

Consequenter

$$ttdx - bbdx - txdt = a\sqrt{bbdt^2 + bbdx^2 - (xdt - tdx)^2}\ ,$$

ergo

$$tt(xdt - tdx)^2 + 2bbtdx(xdt - tdx) + b^4dx^2 = aabbdt^2 + aabbdx^2 - aa(xdt - tdx)^2\ .$$

Unde haec resultat aequatio

$$ttxxdt + aaxxdt - aabbdt - t^3xdx - aatxdx$$
$$+ bbtxdx = abdx\sqrt{(tt + aa - bb)(xx + tt - bb)}\ .$$

Quae aequatio est ad ellipsin, sed nullum adhuc remedium inveni eam integrandi.

11. Patet tamen generaliter, si ponatur $a = 0$, esse $xdy = ydx$ seu $y = nx$, unde cognoscitur peripheriam curvae circa axem rotatae in quolibet situ exhibere lineam brevissimam intra suos terminos. Unde simul intelligitur in sphaera lineam brevissimam esse circulum maximum, et cum sphaera ubique sui similis sit, facile patet circulum maximum inter duo puncta minimam designare viam. Aequatio haec $y = nx$ in generali $xdx = -ydy + Rdt$ seu hac $xx + yy = 2\int Rdt$ substituta dat hanc $(1 + nn)xx = 2\int Rdt$, quae in certis casibus, quando duo puncta data cum axe in eodem plano posita sunt, lineam brevissimam exhibet.

12. Progredior ad corpora cylindrica (Confer Fig. 3, p. 6), in quibus sectio transversa IK ubique eadem est. Pro huiusmodi corporibus haec est aequatio $Pdx = Qdy$. Unde aequatio

$$\frac{Pddy + Qddx}{Pdy + Qdx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

abit in hanc

$$\frac{dyddy + dxddy}{dy^2 + dx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

seu

$$dxddx + dyddy = 0 ,$$

ergo

$$dx^2 + dy^2 = nndt^2$$

consequenter

$$nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

seu t semper est multiplum vel submultiplum arcus in sectione transversa abscissi, unde duo casus simpliciores cognoscuntur; si fuerit $n = 0$, linea brevissima erit perimeter sectionis transversae, sin $n = \infty$, linea brevissima est recta in superficie parallela axi ducta.

13. Sit cylindri sectio transversa circulus, cuius radius $= a$, erit aequatio pro eo $yy = aa - xx$, unde

$$y = \sqrt{aa - xx} \quad \text{et} \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} .$$

Est itaque pro linea brevissima

$$nt = \int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} .$$

Patet ex praecedente paragrapho constructionem lineae brevissimae semper a rectificatione curvae generatricis dependere; nisi igitur haec fuerit rectificabilis, proiectio brevissimae algebraica esse nequit, exceptis casibus $n = 0$ et $n = \infty$, ubi proiectio abit in lineam rectam.

14. Dum hoc scribo, incido in methodum superiorem aequationem (§ 9) inventam pro solidis rotundis simpliciorem et faciliorem ad applicationem ad casus speciales reddendi, hoc modo: ponatur

$$xx + yy = zz \quad \text{et} \quad dx^2 + dy^2 = ds^2 ,$$

erit

$$xdx + ydy = zdz ,$$

unde

$$zzds^2 - zzdz^2 = (ydx - xdy)^2 ,$$

consequenter, cum sit

$$(ydx - xdy)^2 = aadt^2 + aadx^2 + aady^2 = aadt^2 + aads^2 ,$$

erit

$$zzds^2 - zzdz^2 = aadt^2 + aads^2 ,$$

consequenter

$$ds = \frac{\sqrt{zzdz^2 + aadt^2}}{\sqrt{zz - aa}} .$$

At cum in casu nostro solidorum rotundorum aequatio semper eo reduci possit, ut $xx + yy$ aequetur functioni ex t et constantibus compositae, erit zz functio ipsius t, unde aequatio inventa

$$ds = \frac{\sqrt{zzdz^2 + aadt^2}}{\sqrt{zz - aa}}$$

per se est separata, et dat rectificationem curvae, quae est proiectio lineae brevissimae, in plano ad planum horizontale, quemadmodum id assumsi, perpendiculari, cuius cum horizontali intersectio cum axe, in quo t accipitur, angulum rectum constituit.

15. Cum pro cylindro sit $yy + xx = bb = zz$, erit

$$ds = \frac{adt}{\sqrt{bb - aa}}, \quad \text{erit} \quad s = \frac{at}{\sqrt{bb - aa}}.$$

Designat autem s longitudinem proiectionis in base cylindri, quae est ipsa peripheria, unde haec aequatio convenit cum inventa (§ 13). Pro Cono est

$$xx + yy = nntt$$

acceptis t ab vertice coni in axe, ergo

$$nntt = zz \quad \text{et} \quad nntdt = zdz .$$

Ergo

$$ds = dt\sqrt{\frac{n^4tt + aa}{nntt - aa}}.$$

Pro sphaera est

$$xx + yy = bb - tt = zz ,$$

unde

$$ds = dt\sqrt{\frac{tt + aa}{bb - tt + aa}}.$$

16. Facilius adhuc hoc modo praestatur denuo pro solidis rotundis. Si dicatur

$$ds^2 + dt^2 = dv^2 ,$$

ut designet dv elementum ipsius lineae brevissimae, erit

$$dv = \frac{\sqrt{zzdt^2 + zzdz^2}}{\sqrt{zz - aa}} ,$$

unde pro cylindro erit

$$dv = \frac{bdt}{\sqrt{bb - aa}} \quad \text{et} \quad v = \frac{bt}{\sqrt{bb - aa}}.$$

Pro cono est

$$dv = dt\sqrt{\frac{nntt + n^4tt}{nntt - aa}},$$

ergo

$$dv = \frac{ntdt\sqrt{1+nn}}{\sqrt{nntt-aa}} \quad \text{et} \quad v = \frac{\sqrt{(1+nn)(nntt-aa)}}{n}$$

et tandem pro sphaera erit

$$dv = dt\sqrt{\frac{bb}{bb-aa-tt}} \quad \text{et} \quad v = \int \frac{bdt}{\sqrt{bb-aa-tt}}.$$

Quae summatio a rectificatione circuli dependet et indicat curvam esse circulum maximum.

17. Corpora conoidica hic mihi denotant solida lineis ex curvae cuiusvis singulis punctis ad punctum idem extra planum curvae assumtum ductis terminata. Quae in conos ordinarios abeunt, si curva illa genitrix fuerit sectio conica. Solida huiusmodi hanc habent proprietatem, ut sumto initio abscissarum t in vertice coni, sit aequatio inter t, x et y ubique eiusdem dignitatis, seu ut singuli termini ubivis eundem dimensionum numerum conservent. Haec aequatio eo reducatur, ut t exprimatur in meris x, y et constantibus, quae functio proin t exprimens unius tantum erit dimensionis, unde $\frac{t}{x}$ aequabitur functioni ipsorum x et y, quae nullam habet dimensionem, quam voco F. Huiusmodi est

$$\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}, \quad \frac{x}{y} \text{ etc.}$$

18. Cum F sit functio ipsorum x et y, eius differentiale hanc habebit formam $Ndx + Ndy$. Relatio autem, quam habent M et N inter se, ex eo determinatur, quod functio F nullius sit dimensionis, inde hanc erui proprietatem, quod sit

$$Mx + Ny = 0.$$

Quia autem ob $\frac{t}{x} = F$ est

$$\frac{xdt - tdx}{xx} = Mdx + Ndy,$$

erit

$$Mxxdx + tdx = -Nxxdy + xdt,$$

unde erit

$$P = Mxx + t \quad \text{et} \quad Q = -Nxx.$$

Ex duabus vero aequationibus

$$Mx + Ny = 0 \quad \text{et} \quad (Mxx + t)dx = -Nxxdy + xdt$$

elicitur

$$M = \frac{yxdt - ytdx}{xxydx - x^3dy} \quad \text{et} \quad N = \frac{tdx - xdt}{xydx - xxdy} .$$

Consequenter erit

$$P = \frac{xydt - xtdy}{ydx - xdy} \quad \text{et} \quad Q = \frac{xxdt - txdx}{ydx - xdy} .$$

Factis his substitutionibus in aequatione generali (§ 8) sequens obtinetur aequatio

$$\frac{ydtddy - tdyddy + xdtddx - tdxddx}{ydtdy - tdy^2 + xdtdx - tdx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} .$$

19. Ad hanc aequationem reducendam pono

$$tt + xx + yy = zz \quad \text{et} \quad dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2 ,$$

erit

$$xdx + ydy = zdz - tdt \quad \text{et} \quad dx^2 + dy^2 = ds^2 - dt^2 ,$$

porro

$$dxddx + dyddy = dsdds \quad \text{et} \quad yddy + xddx = zddz + dz^2 - ds^2 .$$

Hinc est

$$\frac{zdtddz + dz^2dt - ds^2dt - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds} .$$

Ergo

$$zdsddz + dz^2ds - ds^3 = zdzdds .$$

Consequenter

$$\frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2} = ds .$$

Quae integrata dat hanc

$$\frac{zdz}{ds} = s \quad \text{et porro} \quad ss = zz + C = tt + xx + yy + C .$$

Consequenter in genere pro omnibus corporibus conoidicis est longitudo lineae brevissimae

$$s = \sqrt{tt + xx + yy + C}$$

et ex hac proprietate in quovis speciali casu applicatio facile absolvitur.

20. Applicentur haec ad conum rectum, ad quem haec est aequatio:

$$yy + xx = nntt .$$

Erit ergo

$$S = \sqrt{(nn+1)\,tt + c}\,,$$

quae egregie cum ea, quae § 16 inveniebatur, conspirat. Conveniunt etiam aequationes generales pro corporibus cylindricis et conoidicis cum aequationibus, quae pro linea brevissima invenienda hoc modo eliciuntur: Corpora huiusmodi hanc habent proprietatem, ut eorum superficies in planam evolutione immutetur, et super hoc plano quae est linea brevissima, ea quoque in plano cono circumvoluto brevissima esse debet. Quare linea brevissima in cylindro et cono huius est proprietatis, ut, evoluta superficie et in planam immutata, ea abeat in rectam. Haec methodus plane easdem praebet aequationes, ac § 12 et 19 inveni, sed ea se non ulterius ad quaelibet corpora extendit.

Wir merken noch an, daß MORITZ CANTOR in seiner Geschichte der Mathematik dieser Abhandlung E 9 eine ausführliche Besprechung gewidmet hat, ebenso auch der vier Jahre später verfaßten Arbeit E 27 (vgl. den 3. Band der zweiten Auflage, S. 842—849). Insbesondere scheint die Entdeckung des integrierenden Faktors bei Differentialgleichungen erster Ordnung an letzterer Stelle zuerst bekanntgegeben worden zu sein (in § 18 auf Seite 22: „si vero huiusmodi formam non habuerint, poterunt semper multiplicando vel dividendo aequationes ad talem reduci").

Die Formeln von § 18 entsprechen denjenigen von § 28 der definitiven Abhandlung (p. 9), aber sie sind hier korrekt, während sich später erst die Fehler eingeschlichen haben.

Die zweite Arbeit, die wir besprechen wollen, ist E 250:

Methodus inveniendi infinitas curvas isoperimetras aliave communi proprietate praeditas

Sie ist 1750 verfaßt und am 14. Januar in der Berliner Akademie verlesen worden, wurde aber erst 1761 in den Petersburger Commentarii publiziert. Zeitlich liegt sie zwischen der *methodus inveniendi* und dem Brief LAGRANGES, der 1755 geschrieben wurde. Das Problem ist das, was wir heute die Variation einer Kurve nennen. Zunächst wird die Methode angegeben, wie man Kurven variieren kann, so daß einige Punkte und eventuell auch einige Ableitungen in diesen Punkten unverändert bleiben. Es ist die auch heute noch übliche, daß man zur Funktion einen Ausdruck von der Art

$$(x-a)^m (x-b)^n F(x)$$

addiert, wobei $F(x)$ eine willkürliche Funktion bedeutet, die aber die Wirkung der beiden Faktoren nicht stören darf. Wie man sieht, sind alle Vorbereitungen getroffen, um für Variationsprobleme bei denen beliebig hohe Ableitungen vorkommen, die Varia-

tion zu bilden, auch zeigt der Titel, daß EULER die Untersuchung für die Variationsrechnung angestellt hat. Trotzdem findet sich keine Spur, daß er auf diesem Weg seine Gleichungen ableiten will. Freilich ist das, was EULER später an der LAGRANGEschen Entdeckung bewundert, nämlich die Einführung des Zeichens δy und damit die Analogie mit der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung, in keiner Weise vorweggenommen oder auch nur geahnt.

Der Rest der Arbeit, von § 21 ab, befaßt sich mit Problemen, deren Besprechung wir unter einem besonderen Titel bringen wollen.

Diophantische Probleme aus der Theorie der algebraischen Funktionen[1])

Das Problem, unendlich viele Kurven derselben Länge zwischen zwei festen Punkten zu bestimmen, hatte JOHANN BERNOULLI im Journal des Savans am 12. Februar 1703 gestellt (opera vol. I p. 406):

Problème à résoudre

Une courbe algébrique (vulgairement appelée géométrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussi géométriques, mais d'espèces différentes, lesquelles soient chacune de même longueur que la proposée.

Ce problème a été proposé à Monsieur BERNOULLI *Professeur à Groningue, par un mathématicien de son voisinage. Il le propose à son tour aux Géometres, auxquels il donne tout le reste de cette année, c'est-à-dire jusqu'au commencement de 1704, pour le résoudre.*

Eine freilich nicht vollständige Lösung gab G. CHEYNE und er schreibt am Schluß: Tu vero, vir eruditissime, facile percipias hoc Problema aliquam habere cum Problemate quodam DIOPHANTAEO affinitatem: Problema DIOPHANTI est, Dividere summam duorum Quadratorum in duo alia Quadrata, quorum latera sint rationalia, et Problema BERNOULLII est, Dividere summam duorum Quadratorum in alia duo Quadrata, quorum latera sint summabilia. Sicut Problematis DIOPHANTAEI solutio a vulgari tantum Algebra dependet, sic BERNOULLIANI Problematis solutio communes tantum Fluxionum methodos inversas requirit: utriusque artificium in debita laterum quaesitorum assumptione consistit; scilicet DIOPHANTAEUM, ut sint rationalia, BERNOULLIANUM, ut sint summabilia.

Schon 1695 hatte W. v. TSCHIRNHAUS behauptet, er könne unendlich viele Kurven derselben Länge angeben (JOH. BERNOULLI, opera I, p. 152).

Als Beispiel für ein derartiges Problem geben wir dasjenige, mit dem JOHANN BERNOULLIS Arbeit: *De transformationibus et rectificationibus curvarum* (Opera IV, p. 92) beginnt. Es lautet: Curvas parabolicas cuiusvis gradus transformare in alias alius generis curvas algebraicas eiusdem longitudinis.

1) Vgl. dazu: G. LORIA, Curve piane speciali, Milano 1930, p. 528 ff. A. S.

Gegeben ist die Gleichung

$$y = x^n \ .$$

Das Quadrat des Linienelementes ist

$$((n x^{n-1})^2 + 1)\, dx^2 \ .$$

Nun zerlege man die Klammer auf eine andere Weise in die Summe zweier Quadrate, deren Terme algebraisch integrierbar sind. Ein Beispiel ist:

$$(n x^{n-1} - 1)^2 + \left(\sqrt{2n}\, x^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \ .$$

Durch Integration der Funktionen in den beiden Klammern findet man:

$$u = x^n - x \quad \text{und} \quad v = \sqrt{2n}\,\frac{2}{n+1}\, x^{\frac{n+1}{2}} ,$$

wobei u und v die neuen Variabeln sind, x dagegen einen Parameter darstellt. Das Linienelement ist offenbar in beiden Fällen dasselbe. Im Falle $n = 2$ lautet die Gleichung der Kurve:

$$81\, v^4 = 432\, uv^2 + 144\, v^2 + 256\, u^3 \ .$$

EULER beschäftigte sich bis in sein letztes Lebensjahr mit solchen Problemen, und wir geben nach ENESTROEMS Verzeichnis die Nummern der Abhandlungen und die Bände der opera omnia, die sich damit befassen:

Series I Bd. 21, Nummern 590, 633, 638, 639, 779—783, 817, 819

Bd. 22, Nummern 48 und 245
Bd. 23, Nummern 622, 779, 784, 856
Bd. 25, Nummer 250
Bd. 27, Nummer 23
Bd. 28, Nummern 408, 574
Bd. 29, Nummern 623, 646

Man findet bei den Abhandlungen, soweit sie schon erschienen sind, die Literaturhinweise.

Da diese Probleme bisher noch nicht genügend berücksichtigt worden sind, so möchte ich hier einiges darüber ausführen. Man sucht für eine algebraische Funktion, das heißt eine Funktion y von x, die einer Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt, wo F ein Polynom in den beiden Variabeln ist, eine Darstellung durch einen Parameter t:

$$x = f(t) \quad \text{und} \quad y = g(t) \ ,$$

so daß das Quadrat des Linienelementes einer algebraischen Funktion $k^2(t)$, die vorgegeben ist, gleich wird:

$$f'^2(t) + g'^2(t) = k^2(t) \ .$$

Hierbei sind f und g als algebraische, aber nicht notwendig rationale Funktionen von t vorausgesetzt. In dieser Bedingung liegt die Pointe des Problemes, gerade wie bei den DIOPHANTischen Problemen der Zahlentheorie; denn ohne Bedingung wäre die Aufgabe trivial: man gebe $f(t)$ beliebig vor, bestimme g aus der Gleichung

$$g(t) = \int \sqrt{k^2(t) - f'^2(t)}\, dt$$

und man hat nur noch die Voraussetzungen für die Differenzierbarkeit und die Realität zu machen. EULER behandelt das Problem, wie die analogen Fälle der Zahlentheorie, nicht allgemein, sondern er sucht unendlich viele Lösungen bei gegebenem $k(t)$ zu finden. So behandelt er in mehreren Arbeiten die Fälle der Parabeln und Ellipsen. In dem Ansatz für die Kreise, die er mehrfach anstellte, ergaben sich immer wieder Kreise, so daß er schließlich vermutete, es gebe keine andern Kurven als Kreise, deren Rektifikation auf diejenige des Kreises zurückgeführt werden könne. Man sehe die Arbeiten E 590 und E 693 (opera omnia series I vol. 21, p. 78 und 163) nach. Erst im Jahre 1781 gelang es ihm, eine Kurve zu finden, die kein Kreis ist, deren Rektifikation aber auf diejenige des Kreises führt. Wir wollen diese Lösung hier mitteilen, um dem Leser einen Einblick in die Methoden zu geben (vgl. E 783, opera omnia I 21, S. 262 ff.).

Setzt man die Kreisgleichung an

$$t^2 + u^2 = 1 \ ,$$

so findet man für das Linienelement und damit für $k(t)$ folgende Funktion

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \ .$$

EULER führt jetzt für x und y Polarkoordinaten r und φ ein und erhält für das Linienelement der Kurve:

$$\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = ds = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \ .$$

Die Variabeln s und t sind durch die Gleichung $t = \cos s$ verbunden. Die einfache Methode, um zum Ziel zu gelangen, erscheint als eine reife Frucht jahrelanger Bemühungen. Man schreibt die Gleichung in der Form

$$d\varphi = \frac{\sqrt{ds^2 - dr^2}}{r} \ .$$

Die Aufgabe ist nun diese: Man soll r und φ als Funktionen des Parameters s finden dergestalt, daß x und y als algebraische Funktionen von t resultieren, denn dies wurde ja verlangt. Es genügt aber offenkundig, daß man verlangt, r und $\cos\varphi$ sollen algebraisch

durch t darstellbar sein, denn x und y sind mit r und $\cos\varphi$ algebraisch verbunden. Nun macht EULER den Ansatz

$$r = b + \cos s \ ,$$

wo b eine Konstante ist. Er genügt offenbar der obigen Bedingung. Man findet durch Einsetzen und Integrieren:

$$\varphi = s - \frac{2b}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\, u \ , \quad \text{wo} \quad u = \operatorname{tang} \frac{s}{2} \ .$$

Nun muß $\cos\varphi$ sich durch t algebraisch darstellen. Dies ist aber sicher der Fall, wenn $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$ eine rationale Zahl ist. Man setze $p \cdot \operatorname{arctg} qu = v$, wo p eine rationale Zahl ist, so wird

$$\operatorname{tg} \frac{v}{p} = q \cdot u \ .$$

Es sei $\frac{1}{p} = \frac{M}{N}$, wo M und N ganze Zahlen sind, dann drückt sich $\cos v$ und $\sin v$ rational durch $\operatorname{tg} \frac{v}{2N} = w$ aus, nach bekannten Sätzen. Dasselbe gilt auch von $\cos s$ und $\sin s$, denn es ist ja

$$u = \operatorname{tg} \frac{s}{2} = \frac{1}{q} \operatorname{tg} \frac{v}{p} = \frac{1}{q} \operatorname{tg} \frac{M}{N} v \ .$$

Damit sind aber r und $\cos\varphi$ rational durch den Parameter w ausgedrückt und die Kurven sind algebraisch vom Geschlechte 0. Der ursprüngliche Parameter t kann nun wieder eingeführt werden, was eine algebraische Funktion $w = w(t)$ erfordert, und das Problem ist damit gelöst.

EULER behandelt insbesondere den Fall $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und findet eine Kurve mit einem Doppelpunkt, womit seine frühere Vermutung widerlegt ist.

Kehren wir nun zu unserer Abhandlung E 250 zurück, und zwar zum Paragraphen 22. Hier handelt es sich um das Problem, unendlich viele Kurven derselben Länge zwischen zwei Punkten zu ziehen. Es wird nicht darauf gesehen, daß die Kurven algebraisch sind, sondern sie sind keiner Beschränkung unterworfen: Man will eine Kurvenschar mit einer willkürlichen Funktion haben, welche das Problem löst. Sind x und y die Koordinaten und ist s die Bogenlänge, so gilt

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \ .$$

EULER führt zunächst die Ableitung p als Parameter ein[1]) durch die Gleichung $dy = p\,dx$ und verwendet zwei partielle Integrationen

1) Hier wird also vorausgesetzt, daß die Kurve keine Gerade ist, sonst wäre das Problem sinnlos.

$$y = \int p dx = px - \int x dp$$

$$s = \int \sqrt{1+p^2}\, dx = x\sqrt{1+p^2} - \int \frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}} .$$

Nun setzt er

$$\int x dp = q \quad \text{und} \quad \int \frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}} = r .$$

Die Größe q wird als neue unabhängige Variable aufgefaßt und r als eine willkürliche Funktion von q genommen. Man erhält jetzt

$$x = \frac{dq}{dp} \quad \text{ferner} \quad dr \cdot \sqrt{1+p^2} = pdq .$$

Löst man die letzte Gleichung nach p auf, so erhält man

$$p = \frac{r'}{\sqrt{1-r'^2}} ,$$

wo r' die Ableitung nach q bedeutet.

Diese Gleichung wird nach q abgeleitet, und man erhält

$$p' = \frac{r''}{(1-r'^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Damit ist man in der Lage, x, y und s durch den Parameter q und die freie Funktion $r(q)$ darzustellen:

$$x = \frac{(1-r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r''}$$

$$y = \frac{r'(1-r'^2)}{r''} - q$$

$$s = \frac{1-r'^2}{r''} - r .$$

Bis jetzt ist noch keine Beziehung zum Problem abzusehen. Aber die Lösung ist nahe. Man nehme nämlich für $r(q)$ eine beliebige Funktion $Q(q)$ und man erhält aus den beiden ersten der obigen Gleichungen eine Kurve in der xy-Ebene. In ihr nehme man zwei beliebige Punkte, die den Werten $q = a$ und $q = b$ entsprechen mögen. Die Bogenlänge zwischen den beiden Punkten ist durch die Differenz der Werte von s in der dritten Gleichung gegeben. Nun setze man

$$r = Q(q) + (a-q)^m (b-q)^n \cdot Z(q) ,$$

wo m und n zwei Zahlen >2 sind. Z bedeutet hier eine beliebige Funktion, die natürlich endlich bleiben muß. Für $q = a$ und $q = b$ haben die Größen r, r', r'' einen von Z unab-

hängigen Wert, daher auch die Größen x, y und s, und unser Problem ist sogar mit einer willkürlichen Funktion gelöst. Gewiß ist die Wegschaffung des Integralzeichens der springende Punkt der ganzen Untersuchung. Die vier Funktionen x, y, p und s werden integrallos durch die Funktion $r(q)$ und ihre beiden ersten Ableitungen nach q dargestellt.

In einer Fortsetzung des Paragraphen wird p als unabhängige Variable genommen, q gleich wie bisher, aber r anders definiert und man erhält eine neue Darstellung. In der Arbeit E 245, opera omnia I 22, p. 280 ff. werden neun verschiedene Lösungsmethoden angegeben, unter denen die bisherigen auch figurieren. Diese Abhandlung ist kurz vorher abgefaßt, wie aus der Bemerkung am Schluß von § 21 der vorliegenden Arbeit hervorgeht.

In dem interessanten Summarium wird bemerkt, daß das isoperimetrische Problem nicht verlangt, alle gleichlangen Kurven explizite aufzustellen. Man könne die Wahl treffen, selbst wenn alle anderen Kurven unbekannt sind. Wäre dem nicht so, so wären wir noch weit von der Lösung dieses Problemes entfernt. Aber ein „singulare artificium" gestatte die Lösung des Problemes ohne Kenntnis aller Vergleichskurven. Darunter versteht EULER ohne Zweifel den heute als LAGRANGEschen Faktor bekannten Kunstgriff, den EULER in seinem Buch abgeleitet hatte. Eine weitere Bemerkung im Summarium bezieht sich auf die Tatsache, daß man für die Funktion Z nicht nur Functiones continuas, sondern auch solche, die man beliebig mit der Hand zeichnen kann, zulassen darf. Da es sich auch hier um ein von EULER immer wieder behandeltes Problem handelt, so wollen wir ihm einen besonderen Abschnitt widmen.

Über die diskontinuierlichen Kurven

Unter einer *functio continua* versteht EULER wie schon LEIBNITZ eine durch ein analytisches Gesetz bestimmte Funktion, genau wie die heute als analytische Funktionen bezeichneten. Sie haben die Eigenschaft, daß sie schon durch ein beliebig kleines Stück in ihrer ganzen Erstreckung bestimmt sind, denn die TAYLORsche Reihe erfordert nur die Kenntnis der Funktion mit ihren sämtlichen Ableitungen an einer Stelle. Bis in die Zeit von FOURIER nahm man an, daß nur solche Funktionen durch Reihen und überhaupt mathematisch dargestellt werden können. Daß es auch andere Funktionen gibt, wußte man genau, man nannte sie „mechanische" oder „frei von Hand gezogene" Linien. Nach LEIBNITZ können die Naturgesetze nur mit kontinuierlichen Funktionen ausgesprochen werden. Dies ist sein grundlegendes Weltgesetz, das er als das *Kontinuitätsgesetz* bezeichnete. Jede Weltformel im Sinne von LAPLACE macht unausgesprochen dieselbe Voraussetzung. Daß dies unhaltbar ist, stellt eine der wichtigsten Entdeckungen EULERS dar,

und damit wird die Physik von LEIBNITZ in ihren Grundlagen erschüttert. Kurz nach der berühmten Preisfrage über die Monaden, nämlich 1748, behandelte EULER das Problem der schwingenden Saite, und dort wurde ihm klar, daß man die Anfangslage nicht auf kontinuierliche Kurven beschränken darf. Es ist sehr wohl möglich, daß ein Stück der Saite in der Ruhelage gelassen wird und nur der andere Teil aus ihr entfernt wird. Es wird sich doch eine Schwingung ergeben, deren Natur durch eine einfache Formel mit zwei willkürlichen Funktionen dargestellt wird. Dagegen behauptete D'ALEMBERT, nur solche Lösungen, die durch trigonometrische Reihen darstellbar seien, könnten zugelassen werden. Die hierhergehörigen Abhandlungen finden sich im zehnten Band der zweiten Serie der Eulerausgabe, vor allem E 119.

Zehn Jahre später, 1759, kam EULER wieder auf dieses Problem zurück. Diesmal handelt es sich um die Fortpflanzung des Tones. Auch hier müssen diskontinuierliche Funktionen zugelassen werden, wenn man den Vorgängen in der Natur gerecht werden will. Man sehe namentlich die Abhandlung 305 im ersten Bande der dritten Serie und die zugehörigen Bemerkungen im Vorwort jenes Bandes an.

Im Jahre 1762 schrieb EULER die Abhandlung E 322: *De usu functionum discontinuarum in analysi*. Sie ist im dreiundzwanzigsten Band der ersten Serie p. 74 ff. abgedruckt. Hier wird folgende Definition der kontinuierlichen Funktion gegeben: Iam vero notissimum est in Geometria sublimiore alias lineas curvas considerari non solere, nisi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas per quampiam aequationem expressa difiniatur, ita ut omnia eius puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. Es wird erklärt, daß dieses Gesetz dem Prinzip der Kontinuität folgen muß, das verlangt, daß alle Teile der Kurve durch ein festes Band zusammenhängen, so daß in ihnen keine weitere Änderung mehr möglich ist. Die diskontinuierlichen Kurven dagegen sind durch kein solches Gesetz gebunden. Unter diesen Begriff fallen auch die sogenannten *gemischten Kurven*, die sich aus verschiedenen kontinuierlichen Teilstücken zusammensetzen. Derartige Funktionen kommen in der Lehre der gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht vor, sobald man aber zu den partiellen Differentialgleichungen aufsteigt, so stellen sie sich zwangsläufig ein. Ist nämlich eine Funktion von x und y dadurch charakterisiert, daß ihre partielle Ableitung nach x verschwindet, so ist die Lösung eine beliebige Funktion von y allein. Über diese wird nichts ausgesagt, denn es ist klar, daß, wenn man den Differenzenquotienten einer Funktion von y nach der Variabeln x bildet, stets 0 herauskommt. Dies ist wohl der Sinn der EULERschen Ausführungen: Gerade wie eine Differentialgleichung n-ter Ordnung n willkürliche Konstante in den Lösungen gibt, so wird auch eine partielle Differentialgleichung n-ter Ordnung in zwei unabhängigen Variabeln n willkürliche Funktionen offenlassen. Erst die Charakteristikentheorie gestattet, diese Aussagen völlig zu klären. Ist etwa die partielle Differentialgleichung

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

gegeben, wo man unter a und b kontinuierliche Funktionen zu verstehen hat, so muß ihr Inhalt so ausgesprochen werden: Man bilde die Schar der Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{b}{a},$$

so besagt die partielle Differentialgleichung, daß die Lösungsfunktion $z = f(x, y)$ längs diesen Kurven konstant ist. Wie man aber diese Kurvenkarte in der xy-Ebene kotiert, darüber schweigt die Gleichung. Dasselbe gilt in den höheren Fällen.

Heute ist der Unterschied zwischen den kontinuierlichen und den diskontinuierlichen Funktionen weitgehend verwischt. Die Definition einer Funktion lautet: Jedem Wert der unabhängigen Variabeln in ihrem Wertebereich ist ein Wert der abhängigen zugeordnet, wobei das Wort „zuordnen" nicht weiter erklärt wird. Unbewußt wird der Unterschied aber doch gemacht, denn wenn man etwa für ganze Zahlen n eine Folge angibt, so schreibt man gelegentlich $f(n)$, wo man die Funktion f als gegeben ansieht, meist aber verwendet man n als Index und schreibt etwa a_n, wobei offenbar vergessen wird, daß es sich genau wie im vorigen Fall um eine Funktion im modernen Sinn handelt, nämlich um die Zuordnung der Zahl a_n zur natürlichen Zahl n. Auf derartige Fragen ist u. a. HERMANN WEYL in seiner Schrift über das Kontinuum eingegangen.

Auf dieser Änderung im Funktionsbegriff, die sich unbewußt im 19. Jahrhundert durchgesetzt hat, beruht auch die Kritik des Operierens mit divergenten Reihen, das EULER zu seinen schönsten Entdeckungen geführt hat. Ist $f(n)$ eine bekannte Funktion, so kann man fragen, wie sich deren Gesetz in der durch die Potenzreihe

$$f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots$$

ausgedrückten Funktion auswirkt. Hier kommt die Frage nach der Konvergenz der Reihe nicht vor, man will einfach neue Gesetzmäßigkeiten finden und muß nachträglich feststellen, ob alles stimmt. Wenn man aber die Koeffizienten der Reihe gesetzlos aufeinanderfolgen läßt, so hat diese Erfindungsmethode keinen Sinn mehr.

Daß trigonometrische Reihen auch unstetige Funktionen darstellen, hatte EULER am Beispiel der Reihe

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

erkannt, welche Sprungstellen aufweist, aber er hatte dies als eine Folge der Vieldeutigkeit der Logarithmusfunktion gedeutet. Es war daher eine überaus kühne Idee von FOURIER, zu behaupten, daß man mit seinen Reihen in der Tat „mechanische" Kurven

darstellen könne. Man glaubte damit willkürliche Funktionen in die Analysis gebracht zu haben, bis GEORG CANTOR zeigte, daß das nicht der Fall ist: Die gesetzlose Funktion EULERS bleibt zu Recht bestehen, wenn auch das Gebiet der gesetzmäßigen Funktionen umfassender ist als dasjenige der functiones continuae.

Wir besprechen nun noch JOHANN ALBRECHT EULERS Arbeit A 10:

Auflösung einer geometrischen Aufgabe

Eine lateinische Fassung der ersten 21 Paragraphen ist erhalten, und diese wurde am 17. Februar 1757 in der Berliner Akademie gelesen. Die erweiterte deutsche Fassung erschien erst 1764. JOHANN ALBRECHT wurde am 27. November (neuen Stils) 1734 in Petersburg geboren, wurde 1754 Mitglied der Berliner Akademie, 1758 Direktor der Sternwarte, 1766 Mitglied der Petersburger Akademie und war 1769 bis 1800, seinem Todesjahr, Sekretär dieser Akademie. Er versprach in seiner Jugend viel, und die Arbeit ist frisch lebendig geschrieben. Das Problem wurde ihm vom Vater gestellt, wie STEPHAN RUMOWSKI in seiner Arbeit: *Solutio problematis cuiusdam ad Maximum Minimumve pertinentis* (Novi Commentarii 8, 1763, p. 188—190) berichtet, welche dasselbe Problem behandelt. Es lautet folgendermaßen:

In der xy-Ebene ist der Flächeninhalt für eine geschlossene Kurve vorgegeben, ferner ein Punkt außerhalb dieser Ebene, etwa auf der z-Axe mit $z = a$. Man projiziert die Kurve von diesem Punkt aus und erhält einen Kegelmantel, der sich von der Spitze bis zur xy-Ebene erstreckt. Die Oberfläche desselben soll zu einem Minimum werden. Man findet folgendes Variationsproblem:

$$\int \sqrt{a^2(1+y'^2)+(y-xy')^2}\,dx = \text{Min.}, \quad \int y\,dx = A\ .$$

Die zugehörige Gleichung ist (§ 18):

$$y''(a^2+x^2+y^2)\,a^2 + 2(xy'-y)\,W^2 + \lambda\,W^3 = 0\ .$$

Hier ist W zur Abkürzung für den Ausdruck unter dem Integralzeichen verwendet und λ bedeutet den LAGRANGEschen Faktor. Man sieht hieraus, daß die Geschlossenheit der Kurve nicht in Betracht gezogen wird, was schon RUMOWSKI bemerkt hat.

Die Gleichung läßt eine erste Integration zu, was JOHANN ALBRECHT ziemlich elegant nachweist. Nach einigen weiteren Versuchen bemerkt er, daß man durch Einführung von Polarkoordinaten zum Ziel kommt und auf elliptische Integrale geführt wird (§ 33 ff.).

Das Problem müßte eigentlich so ausgesprochen werden: Man gibt in der xy-Ebene ein Kurvenstück und projiziert es von dem festen Punkt aus. Die Kurve wird nun so variiert, daß der Flächeninhalt, den diese Kurve mit den Endordinaten und dem Intervall

auf der x-Axe bildet, invariant bleibt. Alsdann soll der Kegelmantel einen stationären Wert haben. Es ist klar, daß der Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung der xy-Ebene und dem vorgegebenen Flächeninhalt das Problem löst. Die übrigen Integralkurven werden kaum geschlossen sein. Wir wollen die Formeln angeben, indem wir gleich von Anfang an Polarkoordinaten einführen. Das Problem lohnt sich, weil es ein schönes, wohl nicht allgemein bekanntes Beispiel eines Falles ist, in dem man mit der Integration durchkommt.

Das Integral lautet jetzt:

$$\int (\sqrt{a^2(r^2 + r'^2) + r^4} + \lambda r^2)\, d\varphi = \text{Extremum}.$$

Man findet sogleich das Zwischenintegral:

$$W + \lambda r^2 - \frac{a^2 r'^2}{W} = C$$

oder

$$r^2(a^2 + r^2) = (C - \lambda r^2)\, W$$

und hieraus

$$d\varphi = \frac{a(C - \lambda r^2)\, dr}{r\sqrt{(a^2 + r^2)\,((r^2(a^2 + r^2) - (C - \lambda r^2)^2)}}\,.$$

Setzt man hier $\lambda = -n$ und $C = abn$, so erhält man die Formel von § 34.

Da man r^2 als neue Variable im Integral einsetzen kann, so steht rechts die Summe von einem elliptischen Integral erster Gattung und einem solchen dritter Gattung.

Basel, 10. Juli 1952 ANDREAS SPEISER

Die Revision der numerischen Rechnungen in der Abhandlung E 444 durch unseren Assistenten Herrn Paul Schmutz hat einige leichte Fehler aufgedeckt, die hier vermerkt werden sollen. Auf S. 239 muß in der Tabelle stehen: $E = 0{,}1039276$, $\log E = 9{,}0167309$, $F = 0{,}0803289$, $\log F = 8{,}9048718$, $G = 0{,}0651691$, $\log G = 8{,}8140417$, $H = 0{,}0546771$, $\log H = 8{,}7378055$, $I = 0{,}0470164$, $\log I = 8{,}6722494$, $K = 0{,}0411932$, $\log K = 8{,}6148255$.

Auf der nächsten Seite 240 müssen die vier Zahlen, welche mit „summa“ und „error“ bezeichnet sind, um 7 Einheiten der letzten Stelle verkleinert werden. Für PO ergibt sich $1{,}056124\, a$.

S. 242 wird die „summa“ $= 1{,}10615294$ und die drei unterhalb stehenden Zahlen lauten: 0,803818, 2,525267, 5,050534.

Auf der Seite 247 ist die dritte Zahl der Tabelle falsch. Sie muß heißen: 0,01289654, dadurch wird der erste „error“ $= -\,0{,}00353763$.

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes
9, 27, 42, 56, 84, 99, 250, A 10, 296, 297, 420, 444, 501, 727, 731, 735, 740, 759, 760, 761

pag.

9. De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente 1
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3 (1728), 1732, p. 110—124

27. Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis 13
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1732/3), 1738, p. 123—155

42. De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente . . 41
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1734/5), 1740, p. 135—149

56. Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis 54
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 1741, p. 159—190

84. LEONHARDI EULERI animadversio ad libri praecedentis § 83 et seq. de curvis elasticis 81
Nova acta eruditorum 1746, p. 92—95

99. Solutio problematis cuiusdam a Celeberrimo DANIELE BERNOULLIO propositi 84
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10 (1738), 1747, p. 164—180

250. Methodus inveniendi infinitas curvas isoperimetras aliave communi proprietate praeditas 98
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1756/7), 1761, p. 3—36

A 10 ALBRECHT EULERS Auflösung einer geometrischen Aufgabe . . . 123
Mitteilungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften Bd. 22 (1764), p. 37—60

296. Elementa calculi variationum 141
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10 (1764), 1766, p. 51—93

pag.

297. Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum 177
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1764), 1766, p. 94—134

420. Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi . . . 208
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **16** (1771), 1772, p. 35—70

444. De motu gravium citissimo super curvis specie datis 236
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **17** (1772), 1773, p. 488—504

501. Considerationes circa brachystochronas 250
Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1777: II, 1780, p. 70—88

727. Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda 269
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **15** (1799/1802), 1806, p. 44—54

731. Solutio problematis ob singularia calculi artificia memorabilis . . 280
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **2** (1807/8), 1810, p. 3—9

735. De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit 286
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **3** (1809/10), 1811, p. 16—25

740. De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae maximi minimive proprietate sunt praeditae 293
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **4** (1811), 1813, p. 18—42

759. Investigatio accuratior circa brachystochronas 314
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **8** (1817/8), 1822, p. 17—28

760. De vera brachystochrona seu linea celerrimi descensus in medio resistente 326
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **8** (1817/8), 1822, p. 29—40

761. De brachystochrona in medio resistente, dum corpus ad centrum virium utcunque attrahitur 338
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg **8** (1817/8), 1822, p. 41—45

Index nominum 343

DE LINEA BREVISSIMA IN SUPERFICIE QUACUNQUE DUO QUAELIBET PUNCTA IUNGENTE

Manuscriptum Novembris 1728

Commentatio 9 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3 (1728), 1732, p. 110—124

1. Cuique notum est et a multis tanquam axioma ponitur lineam seu viam brevissimam a dato puncto ad aliud quodcunque esse lineam rectam. Ex hoc facile intelligitur in superficie plana lineam brevissimam duo quaelibet puncta iungentem esse rectam, quae ab altero ad alterum ducitur. In superficie sphaerica, in qua linea recta duci non potest, statuitur a Geometris viam brevissimam esse circulum maximum, qui data duo puncta coniungit.

2. Quae autem in superficie quacunque sive convexa sive concava sive ex his mixta sit via brevissima, quae ex dato puncto ad aliud quodcunque ducitur, nondum est generaliter determinatum. Proposuit mihi hanc quaestionem Celeberrimus IOHANNES BERNOULLI, significans se universalem invenisse aequationem, quae ad lineam brevissimam determinandam cuique superficiei accommodari possit[1]). Solvi ego etiam hoc problema solutionemque hac dissertatione exponere volui.

3. Mechanice hoc problema facillime solvitur ope fili, quod per data duo puncta ductum tenditur, quantum fieri potest, hoc enim filum in superficie proposita designabit viam brevissimam. Necesse est autem, ut hoc filum ubique superficiem tangat, quemadmodum, si superficies convexa sit, in superficiebus quidem concavis non arcum curvae sed chordam repraesentabit. Hoc igitur in casu filum ita applicari debet vel applicatum concipi, ut semper superficiem in parte convexa tangat.

4. Hac vero constructione geometra contentus esse non potest, qui naturam huius lineae intimam perspicere desiderat eamque, ut fieri solet, aequa-

1) Confer praefationem voluminis praecedentis. C. C.

tione exponere. In mechanica autem constructione linea quaesita tantum aspectui exponitur neque ex hoc natura eius potest perspici. Propterea hic methodum sum traditurus, qua pro omnibus superficiebus, dummodo aequationibus exprimi possunt, linea brevissima determinari potest.

5. Ad hoc igitur opus est, ut superficierum naturae aequationibus includantur; quo tota operatio analytice possit absolvi. Solent lineae curvae in eodem plano sitae exprimi aequationibus inter duas coordinatas, ex quibus cuiusque puncti situs secundum longitudinem et latitudinem definitur. In superficiebus autem tres considerandae sunt positionum relationes, cum puncti cuiuslibet in superficie locus secundum tres dimensiones debeat esse determinatus. Tribus igitur in aequationibus superficierum uti convenit variabilibus; quarum una locum puncti secundum longitudinem, altera secundum latitudinem et tertia secundum altitudinem determinat.

6. Concipiatur planum, quod in figura (Fig. 1) congruit cum plano chartae et quod horizontale appellabimus, in eoque recta pro lubitu ducta AP, quae tanquam axis erit consideranda. Sit nunc M punctum cuiuspiam superficiei extra hoc planum situm, demittatur ex eo in planum horizontale perpendiculum MQ plano in Q occurrens et ex Q in lineam seu axem AP ducatur perpendicularis QP. Perspicuum nunc est datis tribus lineis AP, PQ et QM quantitate situm puncti M fore determinatum.

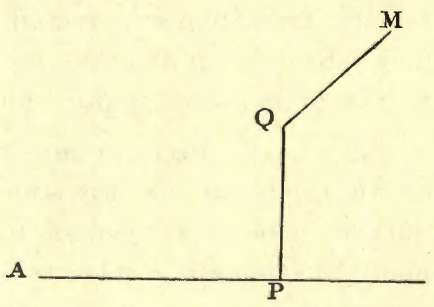


Fig. 1

7. Hae igitur tres lineae AP, PQ et QM nobis erunt indeterminatae, ex quibus cum constantibus aequatio pro superficie punctis M terminata conficitur. Vocabimus AP, t, PQ, x et QM, y, atque pro qualibet superficie, de qua quidquam quaeritur, oportet aequationem inter has indeterminatas investigare. Simili deinceps modo ex huiusmodi aequationibus proprietates eruentur, quo ex aequationibus curvarum earum proprietates derivantur. Uti si superficies fuerit sphaerica, cuius centrum in A et radius $= a$, erit aequatio eius naturam continens $aa = tt + xx + yy$.

8. Quemadmodum porro in linea curva certum punctum definitur vel determinato valore alterutri indeterminatae assignando vel alia quadam aequatione cum aequatione locali coniungenda. Sic in superficiebus, si quaedam trium indeterminatarum determinatur vel alia aequatio cum aequatione superficiem definiente coniungitur, habebitur aequatio pro linea quadam in

ea superficie sita, quae formatur intersectione datae superficiei et alius nova aequatione expressae. Punctum denique fixum in superficie constituetur vel duabus indeterminatis determinandis vel duabus novis aequationibus adiungendis.

9. Quamobrem ad lineam brevissimam in superficie quacunque, cuius cognita est aequatio, ducendam aliam aequationem investigabo, quae cum illa iuncta definit in superficie ea lineam brevissimam quaesitam. Ex his deinde duabus aequationibus omnia, quae ad situm lineae brevissimae cognoscendum pertinent, elici poterunt. Proiectio scilicet in plano horizontali definietur aequatione, quae ex illis duabus prodit exterminata y. Proiectio in plano verticali horizontale in AP secante habetur exterminanda x. Et proiectio in plano verticali et perpendiculari ad AP habetur eliminanda littera t.

10. Ad solvendum nunc hoc problema uti oportet *methodo maximorum et minimorum*, prout ipsa quaestio postulat. Quaeritur autem in superficie data inter omnes lineas eosdem terminos habentes ea, quae est minima. Proprietas haec minimi non solum in integram lineam quaesitam competet, sed etiam in singulas eius particulas; ita ut duo elementa eius contigua designent intra suos terminos viam brevissimam. Ex hoc igitur facilior nascitur modus ad aequationem perveniendi.

11. Ad determinandam nunc positionem duorum elementorum viam intra suos terminos brevissimam constituentium sequens praemitto lemma. Sint (Fig. 2) duo puncta fixa G et H et curva inter ea extensa IK. Quaerendum est in ea punctum M tale, ut via (ductis rectis GM et MH) $GM + MH$ sit omnium, quae per alia puncta curvae IK duci possunt, minima. Notum est ex *methodo maximorum et minimorum* poni oportere, sumto m puncto proximo ipsi M,

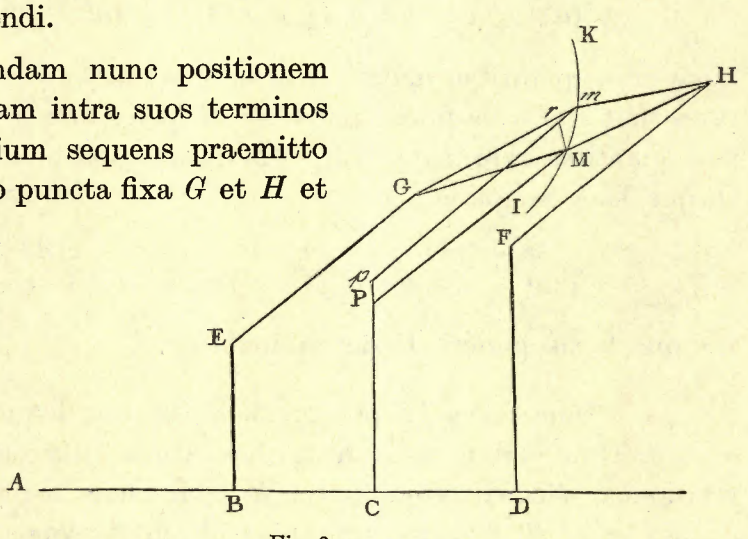


Fig. 2

$$GM + MH = Gm + mH ,$$

ex hacque aequatione inveniri locum puncti M, per quod transiens via $GM + MH$ est minima.

12. Demissis ex punctis G, H, M et m ad planum horizontale perpendiculis GE, HF, MP et mp, producatur pP in C eique iungatur normalis AC in plano eodem horizontali sita, quae tanquam axis consideretur; ad hancque ducantur perpendiculares EB et FD. Ponamus BC et CD esse aequales, tales enim in sequentibus assumere licebit. Sint

$$BC = CD = a\,, \quad BE = b\,, \quad EG = c\,, \quad DF = f\,, \quad FH = g\,.$$

Sit porro $CP = x$ et $PM = y$, quae sunt coordinatae curvae IK. Erit igitur $Cp = x + dx$ et $pm = y + dy$.

13. Ex his invenietur

$$GM = \sqrt{(a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2)}\,,$$

est enim

$$GM^2 = (PM - GE)^2 + (CP - BE)^2 + BC^2\,.$$

Similiter habebitur

$$HM = \sqrt{(a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2)}\,.$$

Tota igitur via $GM + MH$ erit

$$= \sqrt{(a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2)} + \sqrt{(a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2)}\,,$$

quae ergo quantitas debet naturam minimi habere. Variabiles eius quantitates sunt x et y, a quibus punctum M quaesitum pendet. Differentietur igitur ista quantitas exprimens $GM + MH$ et, quod provenit, ponatur $= 0$. Orieturque haec aequatio

$$\frac{(x-b)\,dx + (y-c)\,dy}{\sqrt{(a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2)}} = \frac{(f-x)\,dx + (g-y)\,dy}{\sqrt{(a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2)}}\,.$$

Ex qua locus puncti M determinabitur.

14. Quia curva IK ponitur data, dabitur aequatio inter eius coordinatas x et y: Opus autem est tantum aequatione differentiali, propterea ponamus relationem elementorum dx et dy dari hac aequatione $P\,dx = Q\,dy$ seu $dx : dy = Q : P$. Positis nunc his valoribus proportionalibus loco dx et dy, prodibit aequatio

$$\frac{(x-b)\,Q + (y-c)\,P}{\sqrt{(a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2)}} = \frac{(f-x)\,Q + (g-y)\,P}{\sqrt{(a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2)}}\,,$$

quae vacua est a differentialibus quantitatibus.

15. Consideremus iam lineas GM et MH tanquam duo elementa lineae brevissimae in superficie, in qua sumta sunt puncta G et H et curva IK, ducendae. Ponamus $AC = t$, suntque iam factae $CP = x$ et $PM = y$. Erit $BC = CD = a = dt$, $DF = f = x + dx$, $FH = g = y + dy$, $BE = b = x - dx + ddx$, $EG = c = y - dy + ddy$. Substituantur hi valores pro a, b, c, f et g in aequatione supra inventa, orietur aequatio haec

$$\frac{Q(dx - ddx) + P(dy - ddy)}{\sqrt{(dt^2 + (dx - ddx)^2 + (dy - ddy)^2)}} = \frac{Qdx + Pdy}{\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}} .$$

16. Aequatio haec aliud non significat, nisi quod differentiale huius quantitatis

$$\frac{Qdx + Pdy}{\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}}$$

aequale sit faciendum nihilo, positis P, Q et dt constantibus (dt quidem re ipsa constans ponitur). Habebitur ergo ex hac differentiatione aequatio haec

$$(Qddx + Pddy)\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$$
$$= (Qdx + Pdy)(dxddx + dyddy) : \sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)} .$$

Quae in ordinem reducta abit in hanc

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} .$$

17. Introducamus nunc etiam in calculum naturam superficiei, quae aequatione inter tres coordinatas t, x et y commodissime exprimitur. Quia vero hic tantum utimur aequatione differentiali, sit ea $Pdx = Qdy + Rdt$. Ex hac elici debet aequatio pro curva IK, quippe quae in superficie proposita est sita. Aequatio autem pro ea invenitur, si in aequatione superficiei t ponitur aequalis constanti AC, i. e. si fit $dt = 0$. Proveniet itaque pro curva IK aequatio $Pdx = Qdy$, eadem, quae supra erat assumta. Propterea autem aequationem $Pdx = Qdy + Rdt$ assumsimus, ut ex ea altera resultaret atque ne novis substitutionibus opus esset.

18. Ex his ergo duabus aequationibus in duabus praecedentibus paragraphis datis, quarum altera est pro superficie proposita, altera ex natura minimi deducta, inveniri poterit linea brevissima in superficie ducenda. Ad hoc coniungi debent duae illae aequationes ex iisque nova confici, quae tan-

tum duas indeterminatas involvit. Haecque nova aequatio determinabit proiectionem quampiam lineae brevissimae in aliquo plano, quod ex coordinatis binis remanentibus cognoscetur. Linea itaque brevissima quaesita elicienda est ex his duabus aequationibus

$$Pdx = Qdy + Rdt \quad \text{et} \quad \frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}.$$

19. Generalem hanc solutionem ad tria praecipua formarum superficierum genera accommodabimus, quae sunt cylindrica, conica et rotunda seu tornata. Ad genus cylindricum non tantum refero cylindros communes bases circulares habentes, sed omnia corpora, quorum sectiones ad axem perpendiculares sunt inter se aequales et similes. Huiusmodi cylinder (Fig. 3) sit $BHCFGD$, cuius axis est linea AE. In hoc si ponatur abscissa in axe $AQ = t$ huicque perpendicularis quaecunque in plano horizontali $BCFD$ sumta $QP = x$ et verticalis PM ad superficiem pertingens $= y$, oportet, ut cuicunque constanti aequali facta t semper eadem prodeat aequatio inter x et y.

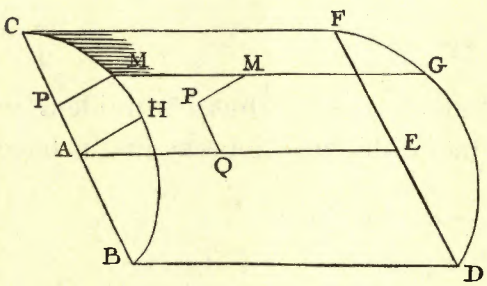


Fig. 3

20. Aequatio igitur pro huiusmodi superficiebus erit $Pdx = Qdy$, in qua P et Q non involvunt litteram t. Si enim vel adesset tertius terminus Rdt vel P et Q a t penderent, aequationes pro variis sectionibus ad axem perpendicularibus variae prodirent, quod esset contra naturam corporum cylindricorum. Eadem igitur aequatio $Pdx = Qdy$ exprimet naturam basis BHC. Facta enim in basi hac $AP = x$ et $PM = y$, aequatio pro hac basi erit etiam $Pdx = Qdy$. Pro cylindris igitur communibus, in quibus BHC est circulus, si A fuerit eius centrum, erit $xdx = -ydy$.

21. Ad lineam nunc brevissimam in superficiebus cylindricis determinandam loco aequationis generalis $Pdx = Qdy + Rdt$ hac uti debemus $Pdx = Qdy$ seu $P : Q = dy : dx$. His igitur proportionalibus loco P et Q in aequatione

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

substitutis prodibit haec

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

quae integrata dat

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = m\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)},$$

cui aequivalet haec $dx^2 + dy^2 = nn\,dt^2$. Consequenter est

$$nt = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C,$$

seu t semper est proportionalis arcui in respondente sectione transversa a linea brevissima abscissi, constante quapiam aucti vel minuti.

22. Sumamus loco aequationis $dx^2 + dy^2 = n^2 dt^2$ hanc

$$dx^2 + dy^2 + dt^2 = n^2 dt^2,$$

licet enim pro n numerum quemlibet substituere, erit

$$nt = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dt^2)}.$$

Ex quo intelligitur longitudinem lineae brevissimae esse ubique, ut respondentem abscissam in axe t. Ex superiore aequatione autem

$$nt = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \text{const.}$$

concluditur, si $n = 0$, fore arcus in sectionibus transversis a linea brevissima abscissos omnes aequales, et propterea lineam brevissimam esse rectam in superficie ductam et axi parallelam. Porro est etiam

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \text{const.} = n \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dt^2)};$$

in qua si $n = 1$, erit linea brevissima ipse perimeter sectionis transversae.

23. Sit transversa cylindri sectio circulus axisque per centrum transeat, erit $x\,dx = -y\,dy$ seu $xx + yy = aa$; cum hac coniungatur aequatio

$$nt + b = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

seu differentialis tantum

$$n^2 dt^2 = dx^2 + dy^2.$$

Ex his aequationibus derivetur nova y carens, quae proiectionem lineae brevissimae in plano horizontali determinabit. Prodibit autem

$$n\,dt = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} \quad \text{seu} \quad nt = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}.$$

Quae dat hanc constructionem: sumta $AQ = t$ abscindatur in basi arcus $HM = nt$, eiusque sinus AP erit aequalis applicatae QP et punctum P in proiectione, quae igitur est linea sinuum.

24. Corpora conoidica hic mihi denotant solida lineis rectis ex curvae cuiuslibet singulis punctis ad punctum fixum extra planum curvae assumtum ductis terminata. Haec in conos ordinarios abeunt, si curvae illae fuerint sectiones conicae. Huiusmodi corpus conoidicum (Fig. 4) sit $ACEDA$, eius axis AQB, et planum horizontale ACD. Ponamus basem $CBDE$ esse perpendicularem ad axem AB. Manifestum nunc est omnes sectiones axi perpendiculares fore singulas similes et proportionales quadratis distantiarum a vertice A. Vocentur ut ante AQ, t; QP, x et PM, y.

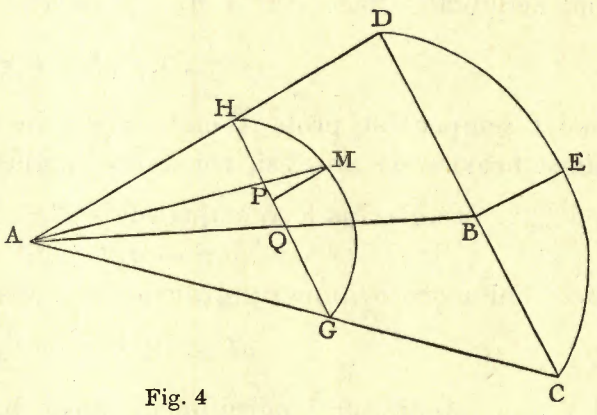


Fig. 4

25. Quia omnes sectiones transversae sunt similes, aequatio inter t, x et y talis esse debet, ut auctis vel minutis duabus harum coordinatarum tertia eadem ratione augeatur vel minuatur. Sive si in aequatione ponantur loco t, x et y hae nt, nx et ny, ut aequatio immutata persistat. Haec vero est proprietas aequationum homogenearum, in quibus t, x et y ubique eundem dimensionum numerum constituunt. In his enim facta substitutione memorata in omnibus terminis n eandem habebit potestatem et propterea ea divisione tolli poterit et aequatio prior prodibit.

26. Hanc ergo corpora conoidica habent proprietatem, ut aequatio eorum inter t, x et y facta sit homogenea, i. e. ut in singulis eius terminis idem sit dimensionum numerus ab indeterminatis t, x et y formatus. Si igitur ex hac aequatione quaeratur, quid sit t, reperietur t aequalis functioni ex x et y compositae homogeneae et unius dimensionis. Quamobrem $\frac{t}{x}$ aequabitur functioni ex x et y compositae etiam homogeneae et nullius dimensionis.

27. Vocetur haec functio F; erit $\frac{t}{x} = F$. Differentiale vero huius functionis F habebit hanc formam $Mdx + Ndy$. In qua litterae M et N hanc

habebunt inter se relationem, ut sit $Mx + Ny = 0$. Nam ponatur in functione F

$$y = qx ,$$

mutabitur ea, quia est homogenea et nullius dimensionis, in aliam, in qua tantum littera q occurret, neque x neque y amplius in ea reperietur. Propterea eius differentiale habebit hanc formam Ldq. Est vero

$$Ldq = \frac{Ldy}{x} - \frac{Lydx}{xx} = Mdx + Ndy .$$

Erit igitur $M = -\frac{Ly}{xx}$ et $N = \frac{L}{x}$. Ex quo apparet fore $Mx + Ny = 0$. Habetur ergo $N = -\frac{Mx}{y}$ vel $M = -\frac{Ny}{x}$.

28. Quia est $\frac{t}{x} = F$, erit

$$\frac{xdt - tdx}{xx} = dF = Mdx + Ndy = -\frac{Nydx}{x} + Ndy .$$

Ex hac prodibit ista aequatio $tdx - Nxydx = -Nxxdy + xdt$, quae comparata cum generali $Pdx = Qdy + Rdt$ dabit $P = t - Nxy$, $Q = -Nxx$ et $R = x$. Ex aequationibus vero duabus $tdx - Nxydx = -Nxxdy + xdt$ et $Mx + Ny = 0$ invenitur

$$N = \frac{xdt - tdx}{xxdy - xydx} \quad \text{et} \quad M = \frac{yxdt - tydx}{xxydx - x^3dy} .$$

Erit igitur

$$P = \frac{txdy - xydt}{xdy - ydx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{tx\,dx - xx\,dt}{xdy - ydx} \text{ [1]} .$$

Factis his substitutionibus in aequatione generali

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

invenietur haec aequatio

$$\frac{t\,dxddx - xdt\,ddx + tdy\,ddy - y\,dt\,ddy}{tdx^2 - x\,dtdx + tdy^2 - ydtdy} \text{ [1]} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} .$$

1) In editione principe hae formulae ita se habent:

$$Q = \frac{yxdt - tydx}{xdy - ydx} , \quad \frac{yxdtddx - tydxddx - txdyddy + xydtddy}{yxdtdx - tydx^2 + txdy^2 - xydtdy} .$$

29. Ad hanc aequationem reducendam pono $tt + xx + yy = zz$ et $dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2$; erit

$$xdx + ydy = zdz - tdt \quad \text{et} \quad dx^2 + dy^2 = ds^2 - dt^2 .$$

Porro

$$dxddx + dyddy = dsdds \quad \text{et} \quad yddy + xddx = zddz + dz^2 - ds^2 .$$

Ope horum valorum pervenitur ad hanc aequationem

$$\frac{zdtddz + dtdz^2 - dtds^2 - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds} .$$

Ex hac erit

$$\frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2} = ds .$$

Quae integrata dat $\frac{zdz}{ds} = s$ haecque iterum integrata hanc

$$ss = zz + C = tt + xx + yy + C .$$

Erit igitur longitudo lineae brevissimae

$$s = \sqrt{(tt + xx + yy + C)} .$$

Et ex hac proprietate in quolibet casu particulari determinabitur linea brevissima quaesita. Pro cono recto, in quo omnes sectiones transversae sunt circuli, est $yy + xx = nntt$. Erit ergo $s = \sqrt{((nn + 1)tt + C)}$.

30. Haec, quae hactenus de linea brevissima ducenda in superficiebus cylindricis tradidimus, alia methodo facilius inveniuntur ex ea horum corporum proprietate, quod eorum superficies evolutione in planas transmutentur. Quae igitur linea in his planis est brevissima, erit etiam in ipsis superficiebus cylindricis et conicis brevissima. Quare linea brevissima in huiusmodi superficiebus hanc habere debet proprietatem, ut superficiebus evolutis et in planas transmutatis linea brevissima transmutetur in rectam.

31. Haec vero methodus latius non patet, neque ad alias superficies, quae non possunt evolutione in planas mutari, potest accommodari. Pro talibus vero methodus hac dissertatione exposita aeque ac pro illis valet. Utamur igitur hac methodo in superficiebus corporum rotundorum seu tornatorum, quae generantur circumrotatione cuiusque figurae circa axem immobilem;

quemadmodum sphaera generatur conversione semicirculi circa diametrum, conus rectus trianguli conversione circa alterutrum latus, cylinder rectus conversione parallelogrammi circa latus.

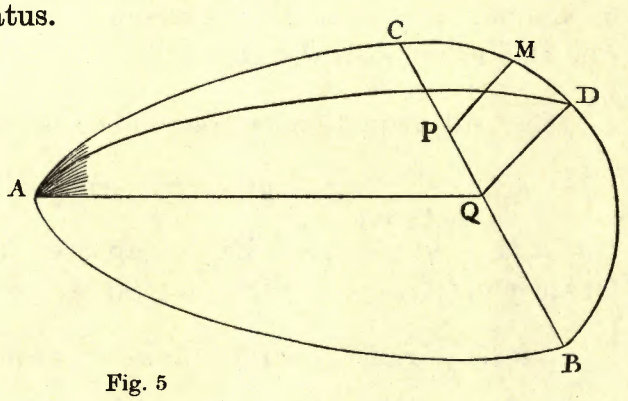


Fig. 5

32. Sit huiusmodi corpus rotundum (Fig. 5) $ABMC$ generatum conversione curvae AQC circa axem AQ. In eo sit BMC sectio transversa, quae erit circulus, cuius centrum in Q. Vocentur ut ante AQ, t; QP, x et PM, y. Aequatio inter has coordinatas hanc debebit habere proprietatem, ut posito t constante seu $dt = 0$ ea abeat in aequationem circuli $xx + yy =$ Const. seu $xdx = -ydy$. Quamobrem aequatio pro solidis rotundis est $xx + yy = T$, ubi T denotat functionem quamcunque ipsius t et constantium. Haec igitur differentiata dat $xdx = -ydy + Rdt$, in qua R solis t et constantibus pendet.

33. Hac aequatione in generali paragrapho 16

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

substituta orietur aequatio ista

$$\frac{xddy - yddx}{xdy - ydx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} .$$

Cuius integralis aequatio est

$$l(xdy - ydx) = l\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)} + la$$

vel

$$xdy - ydx = a\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)} .$$

Haec, si coniungatur cum aequatione naturam superficiei exprimente $xdx = -ydy + Rdt$, determinabit lineam brevissimam.

34. Littera a est arbitraria seu pendet a loco punctorum, per quae linea brevissima transire debet. Si ponatur $a = 0$, erit $xdy = ydx$ atque $y = nx$. Unde cognoscitur peripheriam curvae circa axem rotatae in quolibet situ repraesentare lineam brevissimam inter suos terminos. Hic ergo casus valet,

si duo puncta, inter quae linea brevissima duci debet, sunt cum axe in eodem plano. Ex hisce apparet in sphaera lineam brevissimam semper esse circulum maximum, quia sphaera conversione circuli circa diametrum generatur et sibi ubique est aequalis et similis.

35. Ad aequationem tractabiliorem efficiendam pono

$$xx + yy = zz \quad \text{et} \quad dx^2 + dy^2 = ds^2 ,$$

erit $xdx + ydy = zdz$. Ex his apparet fore $zzds^2 - zzdz^2 = (xdy - ydx)^2$. Quare cum sit $xdy - ydx = a\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$, erit

$$z^2 ds^2 - zzdz^2 = aadt^2 + aads^2 \quad \text{atque} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{zzdz^2 + aadt^2}{zz - aa}\right)} .$$

Si ulterius ponatur elementum ipsius lineae brevissimae $= dv$, erit

$$dv = \sqrt{(ds^2 + dt^2)} = z\sqrt{\left(\frac{dz^2 + dt^2}{zz - aa}\right)} .$$

Etsi hic duae variabiles z et t occurrere videntur, tamen in quolibet casu ex aequatione pro superficie determinabitur t in z et longitudo lineae brevissimae saltem per quadraturas cognoscetur.

36. Haec sunt tria praecipua corporum genera, in quorum superficiebus lineas brevissimas delineandi methodus hic fusius est tradita. Habent hi casus hanc prae aliis proprietatem, ut generalis aequatio ad hos accommodata reduci possit ad differentialem primi gradus. Ex his vero alii se produnt casus similiter integrationem admittentes. Ut pro corporibus cylindricis aequatio est $Pdx = Qdy$. In qua P et Q ab x et y pendere dicta sunt. Perspicuum autem est reductionem aeque succedere, si P et Q etiam a t penderent, quo in casu aequatio non est amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis $xdx = -ydy + Rdt$, R tantum a t pendet. Si igitur R etiam x et y in se comprehendat, aequatio erit pro novo superficierum genere, et nihilominus reductionem admittit.

Proposuit mihi hanc quaestionem Celeberrimus Iohannes Bernoulli, postquam ipsi hanc meam solutionem scripsissem, ut nimirum praeter tria exposita superficierum genera alia investigarem, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI IN LATISSIMO SENSU ACCEPTI SOLUTIO GENERALIS

Commentatio 27 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1732/3), 1738, p. 123—155
Summarium ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum editum

SUMMARIUM

Inter maxima calculi infinitesimalis commoda poni debet methodus ex isto calculo nata, qua inter innumeras quantitates, aut inter innumeras curvas, aequali quadam proprietate praeditas, ea inveniri potest, quae quandam proprietatem maximo aut minimo gradu possideat. Simplicissimus huius rei casus est is, quo inter datas quantitates communi proprietate gaudentes invenienda est ea, quae omnium sit maxima vel minima. Data exempli gratia linea recta infinitis modis in duas partes dividi potest. Sunt ergo lineae rectae partes duae, quaecunque ea communi proprietate praeditae, ut earum summa sit constans, rectangula vero ex istis duabus partibus in infinitum variant, hinc oritur quaestio de secanda recta data in duas aut tres partes tales, ut isto casu rectangulum, hoc vero parallelepipedum inde constructum sit omnium maximum. Resolutio talium casuum fit per *methodum*, quam *maximorum* et *minimorum* geometrae vocarunt. Alia vero et difficilior est methodus, qua curva quaeritur, quae aut inter omnes omnino curvas aut inter omnes, quibus data quaedam proprietas competit, quandam proprietatem maximo minimove gradu possideat; hoc igitur est problema isoperimetricum *latissimo sensu* acceptum, cuius solutionem generalem Celeberrimus EULERUS hic exhibet.

In proemio notat auctor plura esse huius problematis genera. Aut 1° ex omnibus prorsus curvis ea determinanda est, quae proprietatem quandam A maximo vel minimo gradu possideat. Huiusmodi problema est hoc: Inter omnes omnino curvas in plano verticali per duo puncta ductas eam invenire, per quam grave libere descendens minimo tempore ad imum punctum pervenit, aut etiam hoc: inter omnes omnino curvas eam invenire, ex cuius rotatione circa axem generetur solidum minimae resistentiae. Aut 2° ex omnibus curvis proprietate quadam A aequaliter praeditis eam invenire, cui alia proprietas B maximo vel minimo gradu competat. Ad hoc genus pertinet problema hoc: inter omnes curvas in se redeuntes, quae eiusdem sunt longitudinis, eam invenire, quae

maximum includat spatium. Aut 3° ex omnibus curvis, quibus insunt proprietates quaedam communes A et B, eam invenire, cui alia proprietas C maximo minimove gradu competat. Simili vero modo alia genera huius problematis formari possunt.

Secunda celeberrimi auctoris observatio est problemata primi generis solvi posse ex consideratione duorum elementorum contiguorum curvae quaesitae; secundae vero classis problemata non solvi posse, nisi tria curvae elementa in computum ducantur. Ex his autem colligit ad solutionem problematum tertiae classis quatuor opus esse elementis et sic porro; ex quo intelligitur problemata continuo evadere difficiliora, quo altioris generis sunt. His in antecessum notatis methodos generales tradit solvendi problemata duorum priorum generum, quae fere sunt ea, quibus solvendis ante auctorem incubuerunt geometrae summi BERNOULLII, TAYLORUS et HERMANNUS. Auctoris autem pro his problematibus methodus paulo diversa est et latius patet atque ad sequentia quoque genera viam sternit, quae proinde ab ipso ex praecedentibus satis commode solvuntur.

---

1. Problemata, quae curvas maximi minimive proprietate praeditas requirunt et adhuc a Geometris tractata sunt, ad duas classes commode referuntur. Quarum prima omnia ea complectitur, quae inter omnes prorsus curvas eam postulant, quae maximi vel minimi cuiusdam habeat proprietatem. Ad alteram vero classem omnia illa pertinent problemata, quae non ex omnibus, sed iis tantum curvis, quae communi quadam gaudent affectione, maximi minimive proprietatem habentem determinare iubent. Comprehenduntur hae posteriora omnia in famoso isoperimetrico problemate latiori sensu accepto, cuius solutionem Celeberrimi Geometrae IACOBUS et IOHANNES BERNOULLI, TAYLORUS et HERMANNUS[1]) iam pridem dederunt. Quanquam enim hi Viri inter omnes tantum curvas eiusdem longitudinis eam, quae maximi minimive proprietatem habeat, quaesiverunt, tamen eorum methodi facile ad eas quoque quaestiones extendi possunt, quae quaesitam curvam ex omnibus alia communi proprietate praeditis requirunt. Ut si ex omnibus curvis, quae circa axem conversae solida generant aequalia, ea invenienda sit, quae solidum minimae superficiei producat.

2. Prioris generis problemata duo potissimum agitata sunt ad definiendas curvas celerrimi descensus et minimae resistentiae, quae utique inter omnes prorsus curvas suam proprietatem maximo sive minimo possident gradu. Perspicuum autem est, quae curva inter omnes minimam patiatur

1) Confer praefationem voluminis praecedentis. C. C.

resistentiam vel celerrimum producat descensum, eandem hanc praerogativam habere inter omnes curvas eiusdem longitudinis vel alia quacunque proprietate praeditas. Vicissim vero non valet consequentia, ut, quae inter omnes curvas eiusdem longitudinis est brachystochrona, eadem inter omnes omnino curvas talis sit; illius enim generis dantur innumerabiles, cum tamen in hoc praeter cycloidem nulla alia satisfaciat. Ex quo colligitur priorem classem esse quasi speciem posterioris hancque multo latius patere quam illam.

3. Haec considerans in eam incidi cogitationem, an forte tertia quaedam classis existat, cuius secunda tantum esset aliqua species? et hoc modo progrediendo, an dentur etiam quarta, quinta pluresque hoc ordine sequentes huiusmodi classes? Atque reipsa ita se rem habere deprehendi: cognovi enim ad has ulteriores classes perveniri, si curvae eae, ex quibus, quae maximi minimive proprietatem habeat, determinari debet, plures una habuerint affectiones; ut si inter omnes curvas eiusdem longitudinis et eandem comprehendentes aream ea requiratur, quae circa axem conversa maximum generet solidum. Aequatio autem, quam pro hac curva adeptus sum, magis erat generalis, quam si curvas tantum vel eiusdem longitudinis vel eiusdem capacitatis posuissem. Atque sine dubio aequatio magis generalis proditura fuisset, si ad duas has proprietates adhuc unam pluresve superaddidissem. Ex quibus, quod forte admodum paradoxum videbitur, intelligitur, quo magis curvarum propositarum numerus restringatur, eo plures quaesito satisfacientes reperiri.

4. Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime universalibus.

I. *Ex omnibus prorsus curvis eam determinare, quae proprietatem A maximo vel minimo gradu contineat.*

II. *Ex omnibus curvis proprietate A aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem B maximo vel minimo gradu contineat.*

III. *Ex omnibus curvis et proprietate A et proprietate B aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem C maximo minimove gradu contineat.*

IV. *Ex omnibus curvis proprietatibus A et B et C singulis aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem D maximo minimove gradu contineat.*

Simili modo quinta classis curvas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes.

5. Harum quaestionum probe est notanda proprietas ista, quod proprietates curvarum datarum cum ea, quam quaesita habere debet, possint commutari. Ita secunda quaestio, nam in prima haec commutatio locum habere nequit, congruit cum hac: *Ex omnibus curvis proprietate B praeditis eam determinare, quae proprietatem A maximo minimove gradu habeat.* Et tertia quaestio tribus modis potest commutari, prout curva invenienda vel proprietatem A vel B vel C in summo quodam gradu continere debeat, dum interim curvae propositae duas reliquas proprietates aequaliter possideant. Hoc autem ex modo solvendi apparet, cum ea curva maximi vel minimi habeat proprietatem, quae eandem in situ proximo retinet; id quod etiam in curvas eadem proprietate gaudentes competit.

6. Proprietas vero maximi vel minimi, quam curva in his problematibus quaesita habere debet, ita intelligenda est, ut nulla intra eosdem terminos detur curva, nisi ipsa quaesita, quae praescriptas habeat affectiones et tam magno vel tam parvo gradu propositam proprietatem contineat. Ita cyclois hanc habet naturam, ut nulla alia curva intra eosdem terminos dari possit, super qua corpus descendens ab altero ad alterum minori tempore perveniat. Et praeter catenariam per duo puncta transeuntem nulla datur alia curva eiusdem longitudinis et intra eadem duo puncta contenta, cuius centrum gravitatis in inferiore loco sit positum. Assumi vero possunt pro terminis his duo quaecunquae puncta, per quae curva quaesita transit. Sicque in circulo (Fig. 1), qui, ut constat, est omnium figurarum capacissima, assumtis duobus quibuscunque punctis AB, non potest inveniri inter ea puncta alia curva eiusdem longitudinis, quae maiorem sectorem quam ABC comprehendat.

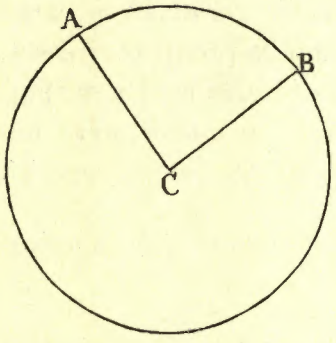


Fig. 1

7. Ad problemata primae classis solvenda sufficit duo curvae elementa contigua considerare, quemadmodum ex solutionibus, quae passim inveniuntur, lineae brachystochronae et solidi minimae resistentiae apparet. Secundae vero classis problemata resolvi non possunt nisi tria elementa curvae in computum ducantur. Ex hisque collegi ad solutionem problematum ad tertiam classem pertinentium quatuor opus esse curvae elementis. Atque ita porro pro quarta classe quinque elementa, pro quinta autem sex requiruntur et sic deinceps. Ex quo intelligitur solutionem problematum continuo evadere diffi-

ciliorem, quo magis iuxta has classes progrediaris. Difficultas quidem in prolixitate calculi tantum consistit, qui eo sit operosior, quo plura elementa curvae debent considerari. Vehementer is autem poterit abbreviari, si debita compendia adhibeantur.

8. Quo autem facilius intelligatur, qua methodo in singulis classibus uti conveniat, iis etiam, quas hic non attingam, plurimum iuvabit duas priores etiam classes percurrere. Quanquam hae vero iam satis sunt tractatae, ut vix quicquam novi in iis detegi posse videatur, tamen eas methodo paulisper diversa et multo latius patente sum persecuturus, quae ad sequentes etiam classes magis est accommodata. Praeterea quoque haec inde nascetur utilitas, quod quaelibet proprietas, quam curva quaesita habere debet in prima et secunda classe ad calculum perducta, in reliquis etiam, si parum immutetur, possit inservire: Multo autem maiore labore opus esset hunc calculum in sequentibus demum classibus de novo perficere.

9. Oporteat igitur primum inter omnes prorsus curvas determinare (Fig. 2) eam oa, quae datam proprietatem maximo vel minimo gradu contineat. Ad hoc praestandum sumatur pro lubitu axis OA, ad quem curva quaesita referatur. Accipiantur huius elementa AB, BC aequalia, hisque respondeant in curva ipsa duo elementa ab et bc, quae in applicatis praebeant elementa bM et cN. Vocetur arcus oa, s; abscissa OA, x; applicata Aa, y. Erunt $AB = BC = dx$, $bM = dy$ et $ab = ds$. Atque porro $cN = dy + ddy$ et $bc = ds + dds$. Deinde manifestum est, quam maximi minimive proprietatem habeat tota curva oa, eandem habere debere quamvis eius partem, ergo etiam duo elementa ab et bc. Quamobrem non duci poterunt alia duo elementa ut $a\beta$ et βc inter terminos a et c, quae contineant praescriptam proprietatem maiore vel minore gradu. Cum vero maximi et minimi proprietas in hoc consistat, ut omnibus in situm proximum translatis proprietas praescripta statum suum tamen retineat, considerari debebunt duo elementa proxima $a\beta$ et βc intra eosdem terminos a et c contenta. In haec igitur praescripta proprietas aeque competere debebit, ac in priora ab et bc. Ex quo positio elementorum ab et bc hincque ipsa curva quaesita oa innotescet.

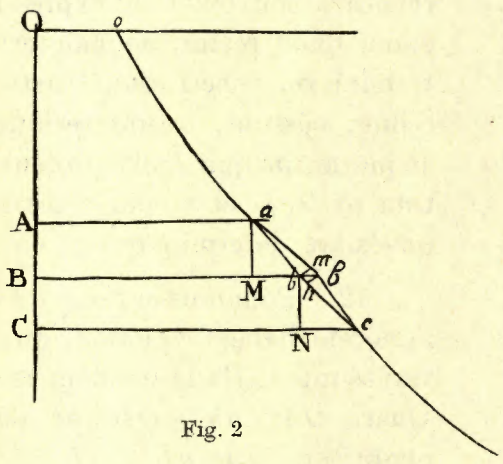


Fig. 2

10. In hoc autem situ proximo ab transit in $a\beta$, bc in βc et Mb in $M\beta$, ac cN in $cN - b\beta$. Crescit igitur elementum ab particula βm, elementum vero bc decrescit particula bn. Similiter bM augetur particula $b\beta$ et cN minuitur particula $b\beta$. Priores vero particulae βm et bn possunt etiam ad $b\beta$ reduci per similitudinem triangulorum βbm, baM et βbn, cbN, ex qua reperitur

$$\beta m = \frac{bM \cdot b\beta}{ab} \quad \text{et} \quad bn = \frac{cN \cdot b\beta}{bc}.$$

Situ ergo proximo migrat ab in $ab + \frac{bM \cdot b\beta}{ab}$, bc in $bc - \frac{cN \cdot b\beta}{bc}$, bM in $bM + b\beta$ et cN in $cN - b\beta$, abscissae vero elementa AB et BC interim manent invariata. Deinde etiam ipsa applicata Bb crescit elemento $b\beta$ et arcus oab particula βm, i. e. $\frac{bM \cdot b\beta}{ab}$. Quae, quanquam saepissime negligi possunt, tamen in genere retineri debent.

11. Cum autem praescripta proprietas, quam curva oa maximo vel minimo gradu continere debet, tanta debeat reperiri in elementis ab, bc, quanta in proximis $a\beta$, βc, in utroque casu eam proprietatem ad calculum revocare conveniet et expressiones resultantes a se invicem subtrahere; id enim, quod restat, aequale erit ponendum nihilo. Singuli vero huius residui termini vel affecti erunt particula $b\beta$ vel βm et bn; quae autem quia ad $b\beta$ reduci possunt, totum residuum erit per $b\beta$ divisibile, quo facto prodibit aequatio, in qua nulla prorsus quantitas a puncto β pendens reperietur, sed tota ex x, y et s cum constantibus constabit. Ex hac igitur natura curvae quaesitae determinabitur.

12. Ponamus curvam oa eam habere debere proprietatem, ut in ea $\int x^n ds$ minorem habeat valorem, quam in alia quacunque linea per puncta o et a transeunte. Hanc eandem igitur proprietatem habebunt elementa ab, bc. Quare $OA^n \cdot ab + OB^n \cdot bc$ debebit etiam esse minimum vel aequale huic quantitati $OA^n \cdot a\beta + OB^n \cdot \beta c$. His a se invicem subtractis restabit haec aequatio $OA^n \cdot \beta m = OB^n \cdot bn$, vel loco βm et bn valoribus inventis substitutis, haec

$$\frac{OA^n \cdot bM \cdot b\beta}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN \cdot b\beta}{bc} \quad \text{sive} \quad \frac{OA^n \cdot bM}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN}{bc}.$$

Quae aequatio ita est comparata, ut posterius membrum sit ipsum prius differentiali suo auctum. Propterea differentiale huius $\frac{OA^n \cdot bM}{ab}$ erit $= 0$, ideoque ipsa haec quantitas aequalis erit quantitati constanti, quae sit a^n.

In symbolis igitur sequens habebitur aequatio $x^n dy = a^n ds$, ex qua curva quaesita cognoscitur. Perspicitur ex his simul, si talis requiratur curva, ut $\int P ds$, ubi P functionem quamcunque ipsius x designat, in ea sit minimum, prodituram esse aequationem hanc $Pdy = A ds$, posito A pro constanti homogenea ipsi P. At si P fuerit functio ipsius y, permutatis coordinatis x et y prodibit aequatio $Pdx = A ds$.

13. Si requiratur, ut in curva quaesita sit semper $\int x^m y^n ds$ maximum vel minimum, erit

$$OA^m \cdot Aa^n \cdot ab + OB^m \cdot Bb^n \cdot bc = OA^m \cdot Aa^n \cdot a\beta + OB^m \cdot B\beta^n \cdot \beta c$$
$$= OA^m \cdot Aa^n \cdot a\beta + OB^m \cdot B\beta^{n-1} \cdot b\beta \cdot \beta c + OB^m \cdot B\beta^{n-1} \cdot Bb \cdot \beta c ,$$

posito $Bb + b\beta$ loco $B\beta$. Ex qua aequatione oritur ista

$$\frac{OB^m \cdot Bb^n \cdot cN \cdot b\beta}{bc} - \frac{OA^m \cdot Aa^n \cdot bM \cdot b\beta}{ab} = n \cdot OB^m \cdot Bb^{n-1} \cdot bc \cdot b\beta$$
$$= n \cdot OA^m \cdot Aa^{n-1} \cdot ab \cdot b\beta .$$

Prior autem pars ubique per $b\beta$ divisa exprimit differentiale huius quantitatis $\frac{OA^m \cdot Aa^n \cdot bM}{ab}$. Quare symbolis substitutis prodibit ista aequatio

$$d \cdot \frac{x^m y^n dy}{ds} = n x^m y^{n-1} ds ,$$

quae sumendo ibi re ipsa differentiale et pro dds ponendo valorem $\frac{dyddy}{ds}$, abit in hanc

$$\frac{xydxddy}{ds^2} + mydy - nxdx = 0 .$$

Reduci haec quidem ad differentialem aequationem primi gradus potest; sed ea fit ita complicata, ut, an separari possit, non appareat.

Si $\int x^m s^n ds$ debeat esse maximum vel minimum, reperitur haec aequatio

$$d \cdot \frac{x^m s^n dy}{ds} = n x^m s^{n-1} dy ,$$

quae porro mutatur in istam $xdxddy + mds^2 dy = 0$. Ex quo apparet exponentem n ex calculo evanescere, ita ut eadem prodeat curva, ac si requireretur

$\int x^m ds$ pro maximo; ea vero integrando reducitur ad hanc $x^m dy = a^m ds$, ut iam supra est inventum[1]).

14. Oporteat invenire curvam, in qua sit $\int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ maximum vel minimum. Hic statim apparet, quia dx ponitur constans, id tantum effici debere, ut $\int ds^m dy^n$ sit minimum vel maximum. Propterea erit

$$ab^m \cdot bM^n + bc^m \cdot cN^n = a\beta^m \cdot \beta M^n + \beta c^m \cdot (cN - b\beta)^n \ .$$

Hinc resultat ista aequatio

$$n \cdot ab^m \cdot bM^{n-1} + m \cdot ab^{m-2} \cdot bM^{n+1} = n \cdot bc^m \cdot cN^{n-1} + m \cdot bc^{m-2} \cdot cN^{n+1} \ ,$$

ex qua iterum concluditur $n \cdot ab^m \cdot bM^{n-1} + m \cdot ab^{m-2} \cdot bM^{n+1}$ debere esse constans. Quamobrem pro curva quaesita haec invenietur aequatio

$$n ds^m dy^{n-1} + m ds^{m-2} dy^{n+1} = a dx^{m+n-1} \ ,$$

quae semper est pro linea recta. Si vero pro maximo minimove haec quantitas data fuisset $\int \frac{x^k ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, tum prodiisset ista aequatio

$$n x^k ds^m dy^{n-1} + m x^k ds^{m-2} dy^{n+1} = a^k dx^{m+n-1} \ .$$

Atque generatim, si proponeretur ista quantitas $\int \frac{P ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, curva quaesita sequenti determinabitur aequatione

$$nP ds^m dy^{n-1} + mP ds^{m-2} dy^{n+1} = A dx^{m+n-1} \ ;$$

ubi P denotat functionem ipsius x quamcunque.

Si denique id, quod maximum vel minimum esse debet, habuerit hanc formam $s \int x ds$, reperietur eodem modo, scilicet elementis ab et bc ita constituendis, ut $\int (ds \int x ds + s x ds)$ sit maximum vel minimum, haec aequatio

$$s ds^2 dy + dx ddy (sx + \int x ds) = 0 \ ^2) \ .$$

---

1) Huic calculo et nonnullis aliis, qui sequuntur, error ea de causa inest, quod problema ad eiusmodi quaestiones pertinet, quas rectam pertractandi methodum EULERUS aliquot post annos invenit, eamque primo in Capite III sui libri explicavit. Qua methodo si usus sis, hanc invenias aequationem

$$dx d^2 y + \frac{m}{c} x^{m-1} s^n ds dy^2 = 0 \ ,$$

in qua constans c ex ultimo curvae elemento pendet valoremque in eo

$$c = \frac{x^m s^n dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

obtinet. C. C.

2) Ex argumentis, quibus EULERUS in Cap. IV §§ 31 seq. et in Cap. V § 67 sui libri usus est, consequitur, ut oporteat curvam quaesitam formam catenariae induere. Ita solutio supra data idonea esse nequit. C. C.

15. His autem primariis casibus primae classis expositis pergo ad secundam, in qua non ex omnibus prorsus curvis, sed iis solum, quae communem quandam habent proprietatem, determinari debet curva, quae maximi vel minimi quandam habeat proprietatem. Quaeri igitur oporteat curvam oa, quae inter omnes curvas affectionem quandam A aequaliter continentes

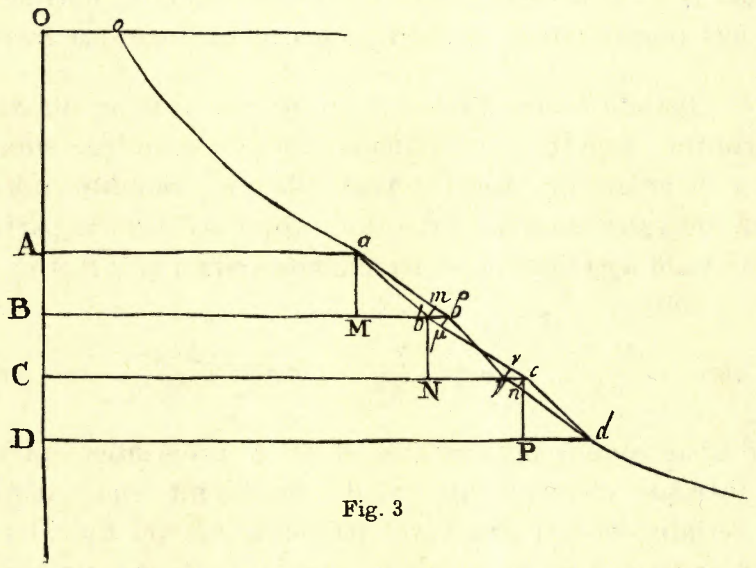


Fig. 3

habeat aliam quandam proprietatem B in maximo vel minimo gradu. Ad hoc problema solvendum tria necesse est considerare elementa curvae quaesitae. Hancobrem in axe pro lubitu assumto OA accipiantur tria elementa AB, BC, CD, quae sint inter se aequalia, hisque respondeant in curva tria elementa ab, bc et cd. Ducantur porro, ut ante, applicatae Aa, Bb, Cc, Dd, axique parallelae aM, bN, cP. Dictis ergo OA, x; Aa, y et oa, s, erit

$$AB = BC = CD = dx, bM = dy \quad \text{et} \quad ab = ds ,$$

porroque

$$cN = dy + ddy , \quad bc = ds + dds \quad \text{atque} \quad dP = dy + 2ddy + d^3y$$
$$\text{et} \quad cd = ds + 2dds + d^3s .$$

16. Deinde ducantur alius cuiusdam curvae per puncta α et d transeuntis elementa $a\beta$, $\beta\gamma$ et γd, ad eadem axis elementa relata. Haec autem ita debent esse comparata, ut proprietatem A aeque contineant ac priora ab, bc et cd; aliae enim hic curvae non considerantur, nisi in quas proprietas A aequaliter competat. At nihilominus haec elementa infinitis modis inflecti possunt, quia a positione duorum punctorum β et γ pendent. Quocirca altera

proprietas B adhuc in computum duci potest; quod, si duo tantum elementa ut in antecedente casu assumta fuissent, fieri non potuisset. At ex natura maximorum et minimorum elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd proprietatem B aeque complecti debent, ac illa ab, bc, cd, ex quo intelligitur curvam quaesitam oa prodire, si hae duae elementorum triades ita assumantur, ut utramque proprietatem A et B aequali gradu comprehendant; in hocque simul ratio commutationis proprietatum A et B, cuius mentio iam est facta, consistit.

17. Quando autem elementa ab, bc, cd in situm proximum $a\beta$, $\beta\gamma$, γd transferuntur, augetur ab particula βm, bc minuitur summa particularum $b\mu + c\nu$ et cd iterum augetur particula γn. Similiter bM crescit particula $b\beta$ et cN decrescit summa $b\beta + c\gamma$, atque dP crescit particula $c\gamma$. Possunt vero illa etiam accrementa et decrementa reduci ad $b\beta$ et $c\gamma$ per similia triangula, fit enim

$$\beta m = \frac{bM \cdot b\beta}{ab}, \quad b\mu = \frac{cN \cdot b\beta}{bc}, \quad c\nu = \frac{cN \cdot c\gamma}{bc} \quad \text{et} \quad \gamma n = \frac{dP \cdot c\gamma}{cd}.$$

Propter duas autem proprietates A et B propositas, quae communes esse debent utrique elementorum triadi, prodibunt duae aequationes, quarum singuli termini assecti erunt vel particula $b\beta$ vel $c\gamma$. His igitur eliminatis elicitur aequatio, in qua nullae amplius insunt quantitates a punctis β et γ pendentes, seu symbolis introductis, tota constabit ex x, y, s et constantibus. Ex qua propterea curva quaesita cognoscitur.

18. Duae vero illae aequationes, quae ex consideratione duarum propositarum proprietatum A et B oriuntur, huiusmodi habebunt formam

$$P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma = 0 \quad \text{et} \quad R \cdot b\beta - S \cdot c\gamma = 0,$$

in quibus quantitates Q et S plerumque ita sunt comparatae, ut sit

$$Q = P + dP \quad \text{et} \quad S = R + dR.$$

Si vero huiusmodi formam non habuerint, poterunt semper multiplicando vel dividendo aequationes ad talem reduci. Hoc si factum erit, dico fore semper $P + aR = 0$, ubi pro a quantitas constans quaecunque accipi potest. Nam expulsis $b\beta$ et $c\gamma$ oritur ista aequatio $QR = PS$, quae substitutis $P + dP$ et $R + dR$ loco Q et S abit in hanc $RdP = PdR$, ex qua integrata provenit $P + aR = 0$. Haec aequatio hoc modo producta erit pro ipsa curva quae-

sita; quare, si illae aequationes ex proprietatibus propositis deductae praescripto modo instituantur, in promtu erit in quovis casu aequationem curvae quaesitae exhibere.

19. Sufficiet igitur pro singulis proprietatibus, quae proponi possunt, aequationes dicto modo adornasse, ut habeant formam

$$P \cdot b\beta - (P + dP) \cdot c\gamma = 0 \ .$$

Huiusmodi enim duabus coniunctis obtinetur aequatio pro curva quaesita; dummodo eae aequationes ex proprietate, quae omnium curvarum, ex quibus quaesita determinanda est, communis esse debet, et ex ea, quam quaesita maximo gradu continere debet, eliciantur. Proposita ergo sit primo quantitas $\int y^n dx$, quae vel communis esse debeat curvarum datarum, vel maxima minimave in quaesita: utrumque enim eodem redit. Hanc ob rem ob dx constans debebit esse

$$Aa^n + Bb^n + Cc^n = Aa^n + B\beta^n + C\gamma^n \ ,$$

unde prodit ista aequatio $B\beta^{n-1} \cdot b\beta - C\gamma^{n-1} \cdot c\gamma = 0$, quae praescriptam iam habet proprietatem. Atque in symbolis quantitas ipsi P respondens est y^{n-1}. Si positum fuisset $\int x^n dy$, prodiisset x^{n-1} respondens quantitati P. Et ex assumta quantitate $\int T dx$, designante T functionem quamcunque ipsius y, invenietur pro littera P haec fractio $\frac{dT}{dy}$. Simili modo prodiisset $\frac{dT}{dx}$ ex $\int T dy$, si T fuerit functio ipsius x.

20. Exprimat $\int x^n ds$ proprietatem, quae in elementis ab, bc, cd et $a\beta$, $\beta\gamma$, γd aequaliter inesse debeat; erit

$$OA^n \cdot ab + OB^n \cdot bc + OC^n \cdot cd = OA^n \cdot a\beta + OB^n \cdot \beta\gamma + OC^n \cdot \gamma d \ .$$

Est autem

$$a\beta - ab = \frac{bM \cdot b\beta}{ab}, \quad bc - \beta\gamma = \frac{cN \cdot b\beta}{bc} + \frac{cN \cdot c\gamma}{bc} \quad \text{et} \quad \gamma d - cd = \frac{dP \cdot c\gamma}{cd},$$

quare ista prodit aequatio

$$OA^n \cdot \frac{bM \cdot b\beta}{ab} - \frac{OB^n \cdot cN \cdot b\beta}{bc} - \frac{OB^n \cdot cN \cdot c\gamma}{bc} + \frac{OC^n \cdot dP \cdot c\gamma}{cd} = 0 \ .$$

Haec iam habet requisitam proprietatem, est enim factor in $b\beta$ ductus cum suo differentiali aequalis factori, per quem $-c\gamma$ est multiplicatum. In hoc igitur casu est

$$P = \frac{OA^n \cdot bM}{ab} - \frac{OB^n \cdot cN}{bc},$$

sive huius negativo, quod in symbolis est $d \cdot \frac{x^n dy}{ds}$. Simili modo, si propositum fuisset $\int X ds$ et X denotat functionem quamcunque ipsius x, repertum fuisset pro P, $d \cdot \frac{X dy}{ds}$. At si proponatur $\int y^n ds$, tum reperietur pro P

$$d \cdot \frac{y^n dy}{ds} - n y^{n-1} ds .$$

Atque ex hoc porro perspicitur ex quantitate $\int Y ds$, designante Y functionem quamcunque ipsius y, repertum iri pro P hanc quantitatem

$$d \cdot \frac{Y dy}{ds} - \frac{dY ds}{dy} .$$

21. His attente inspiciendis poterimus, quae quantitas ipsi P respondens proditura sit, definire, si generaliores formulae accipiantur. Ut proposita sit formula $\int T dx$, ubi T denotet functionem quamcunque ipsarum x et y, sitque $dT = + M dy + N dx$, invenitur $P = + M dx$. Atque proposita formula $\int T dy$ manente T ut ante erit $P = + N dx$. Denique, si proposita fuerit formula $\int T ds$, reperietur

$$P = + M ds - d \cdot \frac{T dy}{ds} = \frac{M dx^2}{ds} - \frac{N dx dy}{ds} - T d \cdot \frac{dy}{ds} .$$

Dedi hic hos valores, prout calculo immediate inveniuntur, si proprietas praescripta ad elementa ab, bc, cd accommodata subtrahatur ab eadem ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd accommodata; neque signa mutavi neque per quantitates constantes vel multiplicavi vel divisi. Ex hoc non parva nascitur utilitas ista, quod valor ipsius P etiam inveniri queat, si formula praescripta habeat valorem compositum, ut $\int T ds + \int t dy$. Si enim fuerit $dt = m dy + n dx$, manente dT ut ante, erit P summa eorum, quae pro quolibet membro seorsim inveniuntur, scilicet

$$P = \frac{M dx^2}{ds} - \frac{N dx dy}{ds} - T d \cdot \frac{dy}{ds} - n dx .$$

22. Hi sunt casus, quando in formula proposita quantitas T, quae vel in dx vel dy vel ds est ducta, est functio quaecunque ipsarum x et y. In hisque, uti constat, statim ad aequationem pervenitur, quae formam habet

$$P \cdot b\beta = (P + dP) c\gamma .$$

At si etiam s in T contineatur, non pervenitur ad huiusmodi aequationem, sed ea demum ad talem debet reduci. Ut sit proposita haec formula $\int s^n dx$, oportebit esse ob dx constans

$$oa^n + ob^n + oc^n = oa^n + o\beta^n + o\gamma^n \quad \text{seu} \quad ob^n + oc^n = o\beta^n + o\gamma^n .$$

Est vero

$$o\beta = ob + \beta m = ob + \frac{bM \cdot b\beta}{ab}$$

et

$$o\gamma = oc + \beta m - b\mu - c\nu = oc + \frac{bM \cdot b\beta}{ab} - \frac{cN \cdot b\beta}{bc} - \frac{cN \cdot c\gamma}{bc} .$$

Ergo

$$o\beta^n - ob^n = \frac{n \cdot ob^{n-1} \cdot bM \cdot b\beta}{ab}$$

et

$$o\gamma^n - oc^n = \frac{n \cdot oc^{n-1} \cdot bM \cdot b\beta}{ab} - \frac{n \cdot oc^{n-1} \cdot cN \cdot b\beta}{bc} - \frac{n \cdot oc^{n-1} \cdot cN \cdot c\gamma}{bc} .$$

Quorum residuorum summa cum debeat evanescere, erit

$$\left((ob^{n-1} + oc^{n-1})\frac{bM}{ab} - \frac{oc^{n-1} \cdot cN}{bc}\right) b\beta = \frac{oc^{n-1} \cdot cN \cdot c\gamma}{bc} .$$

Ponatur $\frac{bM}{ab} = q$, erit $\frac{cN}{bc} = q + dq$, et pro ob posito s erit $oc = s + ds$, habebiturque

$$(2s^{n-1}q + (n-1)s^{n-2}qds - s^{n-1}(q + dq) - (n-1)s^{n-2}qds)\, b\beta$$
$$= (s^{n-1}q + s^{n-1}dq + (n-1)s^{n-2}qds)\, c\gamma .$$

Ex qua formatur ista aequatio

$$P \cdot b\beta = P \cdot c\gamma \cdot \frac{sq + sdq + (n-1)\,qds}{sq - sdq} .$$

Debet igitur esse

$$P\left(\frac{sq + sdq + (n-1)qds}{sq - sdq}\right) = P + dP ,$$

ut prodeat requisitus valor ipsius P. Fiet autem ex ista aequatione

$$2Psdq + (n-1)Pqds = sqdP .$$

Huiusque integrale $s^{n-1}q^2 = P$ seu $P = \frac{s^{n-1}dy^2}{ds^2}$. Si proposita fuisset haec formula $\int Sdx$, ubi S denotat functionem quamcunque ipsius s, prodiisset

$$P = \frac{dSdy^2}{ds^2} .$$

Et huic formulae $\int SX dx$ respondet valor $P = \frac{X dS dy^2}{ds^2}$. Atque generatim, si fuerit T functio quaecunque ipsarum s, y et x, erit posito $dT = Lds + Mdy + Ndx$

$$P = c^{\int \frac{L\,dq}{Lq+M}} (Lq + M),$$

scripto q loco $\frac{dy}{ds}$.

23. Propositus nunc sit hic casus, quo $\int Tds$ (ubi T ut ante est functio quaecunque ipsarum x, y et s et $dT = Lds + Mdy + Ndx$) in duabus curvis proximis debeat esse idem. Erit ergo

$$\begin{aligned} &T \cdot ab + (T + dT)bc + (T + 2dT + ddT)\,cd \\ &= T \cdot a\beta + (T + dT)\beta\gamma + (T + 2dT + ddT)\gamma d . \end{aligned}$$

At differentialia dT et ddT in utroque membro non sunt aequalia, sed differunt pro punctis β et γ. Ponantur autem primo aequalia, erit residuum, si illud membrum ab hoc subtrahatur

$$-b\beta \cdot d \cdot Tq + c\gamma \cdot d(T + dT)(q + dq) ,$$

posito q loco $\frac{dy}{ds}$. Ponantur iam $a\beta$, $\beta\gamma$ et γd inaequalia ipsis ab, bc et cd et quaeratur differentia, quae ex varia significatione dT et ddT oritur. Est vero ipsius Lds, transitu facto ab elementis ab, bc, cd ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd, incrementum $L \cdot \beta m = Lq \cdot b\beta$, ipsius Mdy vero $M \cdot b\beta$; Ndx non mutatur. Simili modo ipsius $2Lds + d \cdot Lds$ incrementum est

$$(L + dL)(\beta m - b\mu - c\gamma) = (L + dL)(-dq \cdot b\beta - (q + dq)c\gamma)$$

et ipsius $2Mdy + d \cdot Mdy$ incrementum est $-(M + dM)c\gamma$. His singulis incrementis per bc et cd respective multiplicatis cum ante invento residuo in unam summam coniectis et $= 0$ positis prodibit ista aequatio

$$\begin{aligned} &b\beta(-d \cdot Tq + Lqds + Mds - Ldsdq) \\ &+c\gamma(d \cdot (T+dT)(q+dq) - Lqds - Lqdds - qdLds - Mds - Mdds - dMds) = 0. \end{aligned}$$

Assumo hic autem bc pro ds et cd pro $ds + dds$, quia ab non occurrit. Si haec aequatio cum $P \cdot b\beta - (P + dP)c\gamma = 0$ conferatur, reperietur

$$P = c^{\int \frac{Lds^2\,dq}{Mdx^2 - Ndxdy - Tdsdq}} \left(\frac{Mdx^2 - Ndxdy - Tdsdq}{ds} \right),$$

ubi c significat numerum, cuius logarithmus est 1. Similiter, si formula proposita fuerit $\int T dy$, reperietur

$$P = c^{-\int \frac{L\,ds\,dy\,dq}{L dx^3 + N dx\,ds}} \left(\frac{L dx^2 + N dx ds}{ds} \right) .$$

Hic, si fuerit $N = 0$, erit $P = \frac{L dx^3}{ds^2}$.

24. Consideremus adhuc hanc unicam formulam

$$\int X ds^m dy^n dx^{1-m-n} ,$$

in qua X functionem tantum ipsius x denotat. Neglecto igitur dx ut constante erit

$$\begin{aligned} X \cdot ab^m \cdot bM^n + (X + dX)\, bc^m \cdot cN^n + (X + 2dX + ddX) cd^m \cdot dP^n \\ = X \cdot a\beta^m \cdot \beta M^n + (X + dX)\beta\gamma^m (cN - b\beta - c\gamma)^n \\ + (X + 2dX + ddX)\gamma d^m (dP + c\gamma)^n . \end{aligned}$$

Cuius aequationis illa parte ab hac subtracta restabit

$$\begin{aligned} - b\beta \cdot d \cdot X(m \cdot ab^{m-2} \cdot bM^{n+1} + n \cdot ab^m \cdot bM^{n-1}) \\ + c\gamma \cdot d\,(X + dX)(m \cdot bc^{m-2} \cdot cN^{n+1} + n \cdot bc^m \cdot cN^{n-1}) = 0 . \end{aligned}$$

Quae aequatio cum iam habeat formam huius

$$P \cdot b\beta - (P + dP) c\gamma = 0 ,$$

erit

$$\begin{aligned} P &= - d \cdot X(m ds^{m-2} dy^{n+1} + n ds^m dy^{n-1}) \\ &= - d \cdot X ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2) . \end{aligned}$$

Simili modo, si proposita fuisset haec formula $\int T ds^m dy^n dx^{1-m-n}$, in qua T fuerit functio quaecunque ipsarum x et y, ita ut sit $dT = M dy + N dx$, proditura fuisset haec aequatio

$$P = M ds^m dy^n - d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2) .$$

Atque generalissime, si in $\int T ds^m dy^n dx^{1-m-n}$ fuerit T functio quaecunque ipsarum x, y et s atque propterea $dT = L ds + M dy + N dx$, erit

$$\begin{aligned} P = c^{\int \frac{L ds^m dy^n dq}{M ds^m dy^n + Lq\, ds^m dy^n - d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2)}} (M ds^m dy^n + Lq ds^m dy^n \\ - d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2)) . \end{aligned}$$

Haecque est formula generalissima omnes priores in se complectens.

25. Hae formulae inventae seu valores ipsius P respondentes omnibus, quae proponi possunt, proprietatibus, unum tantum signum summatorium involventibus, quo clarius in conspectum cadant atque facilius ad casus quosvis possint accommodari, collegi eas et in sequentem tabulam disposui.

$$\left(q = \frac{dy}{ds} \quad et \quad ddx = 0\right)$$

	Proprietates propositae		*Valores litterae P respondentes*
I.	$\int T dx$	$dT = M dy$	$P = M dx$
II.	$\int T dy$	$dT = N dx$	$P = N dx$
III.	$\int T ds$	$dT = N dx$	$P = d \cdot Tq$
IV.	$\int T ds$	$dT = M dy$	$P = d \cdot Tq - M ds$
V.	$\int T dx$	$dT = M dy + N dx$	$P = M dx$
VI.	$\int T dy$	$dT = M dy + N dx$	$P = N dx$
VII.	$\int T ds$	$dT = M dy + N dx$	$P = d \cdot Tq - M ds$
VIII.	$\int T dx$	$dT = L ds + N dx$	$P = Lq^2$
IX.	$\int T dy$	$dT = L ds + M dy$	$P = L dx^2 : ds^2$
X.	$\int T dx$	$dT = L ds + M dy + N dx$,	$P = c^{\int \frac{L dq}{Lq + M}} (Lq + M)$
XI.	$\int T dy$	$dT = L ds + M dy + N dx$,	$P = c^{-\int \frac{L ds dy dq}{L dx^2 + N dx ds}} \left(\frac{L dx + N ds}{ds}\right)$
XII.	$\int T ds$	$dT = L ds + M dy + N dx$,	$P = c^{\int \frac{L ds^2 dq}{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}} \left(\frac{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}{ds}\right)$
XIII.	$\int \frac{T ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$,	$dT = N dx$,	$P = d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2)$
XIV.	$\int \frac{T ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$,	$dT = M dy + N dx$,	$P = d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2) - M ds^m dy^n$
XV.	$\int \frac{T ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$,	$dT = L ds + M dy + N dx$,	$P = c^{\int \frac{L ds^m dy^n dq}{(Lq + M) ds^m dy^n - d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2)}} ((Lq + M) ds^m dy^n - d \cdot T ds^{m-2} dy^{n-1} (m dy^2 + n ds^2))$.

26. Ope huius tabulae nunc perfacile erit problemata tum primae tum secundae classis resolvere. Quod quidem ad primam attinet, in qua quaeritur curva, quae omnium maximum vel minimum habeat valorem proprietatis propositae A, ad hanc inveniendam sequens habetur regula: Quaeratur proprietas A in tabula, et functione T ad eam accomodata accipiatur valor ipsius P respondens isque ponatur $= 0$, quae aequatio erit pro curva quaesita. Ut si quaerenda sit curva brachystochrona, debebit tempus descensus, quod per $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ exprimitur, esse minimum. Continetur autem haec formula in tertia fitque $T = \frac{1}{\sqrt{x}}$, cui respondet $P = d \cdot \frac{q}{\sqrt{x}}$, qui valor cum debeat esse $= 0$, erit

$$\frac{q}{\sqrt{x}} = \text{const.} \quad \text{seu} \quad dy\sqrt{a} = ds\sqrt{x} \quad \text{et} \quad ads^2 - adx^2 = xds^2 \ .$$

Fit igitur

$$ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} \quad \text{et} \quad s = C - 2\sqrt{a(a-x)} \ ,$$

ex qua intelligitur curvam quaesitam esse cycloidem. Ad inveniendam curvam oa, quae circa axem Oo ipsi oA normalem rotata generat solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum patiatur minimam resistentiam, debebit $\int \frac{xdx^3}{ds^2}$ esse minimum; continetur hoc in formula XIII, ubi esse debet $T = x$, $m = -2$, $n = 0$. Hinc fit $P = d \cdot -\frac{2xdy}{ds^4} = 0$. Ergo $xdx^3dy = ads^4$, ex qua curva generans solidum minimae resistentiae determinatur.

27. Ad secundae classis problemata solvenda sequens inserviet regula. Si ex omnibus curvis proprietate A aequaliter praeditis ea debeat inveniri, quae proprietatem B maximo minimove gradu contineat, quaerantur proprietates A et B in tabula et sumantur valores ipsius P respondentes, eorumque per quasvis quantitates constantes multiplicatorum summa ponatur aequalis nihilo; quo facto aequatio proveniens exprimet naturam curvae quaesitae. Hanc regulam nonnullis exemplis illustrare iuvabit. Quaeratur curva oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis maximam comprehendat aream; erit $A = s = \int ds$ et $B = \int ydx$. Illi autem ex formula III respondet $P = dq$ huicque ex prima $P = dx$. Quamobrem haec aequatio $adq = dx$ erit pro curva quaesita. Ex illa vero prodit haec

$$aq = \frac{ady}{ds} = x \quad \text{seu} \quad dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}, \quad \text{i. e.} \quad y^2 + x^2 = a^2 \ .$$

Quae est aequatio ad circulum. Requiratur nunc curva oa, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis, si circa axem Oo convertatur, producat maximum solidum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \int x^2 dy$: quare pro A erit $P = dq$ et pro B erit $P = 2xdx$. Ex quibus iuxta regulam sit $a^2 dq = 2xdx$. Quae integrata dat $a^2 dy = x^2 ds \mp b^2 ds$, qua natura curvae elasticae exprimitur. Invenienda sit porro curva oa, quae circum axem Oo rotata inter omnes alias aequalia solida producentes generet minimam superficiem. Erit ergo $A = \int x x dy$ et $B = \int x ds$. Illi igitur ex Tabula respondet $P = 2xdx$, huic vero $P = d \cdot xq$. Hinc nascitur aequatio

$$2xdx = ad \cdot xq \quad \text{seu} \quad x^2 \pm b^2 = \frac{axdy}{ds} .$$

Quae reducitur ad hanc

$$dy = \frac{(x^2 + b^2)\, dx}{\sqrt{(a^2 x^2 - (x^2 \pm b^2)^2)}} .$$

Haec est ad circulum, si $b = 0$, et ad catenariam, si fiat a infinitum et $bb = ae$. Quaeratur etiam curva oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis habeat centrum suum gravitatis ab axe Oo maxime remotum. Erit ergo

$$A = \int ds \quad \text{et} \quad B = \frac{\int x ds}{s} .$$

Quia autem s in omnibus curvis ponitur eiusdem quantitatis, poterit pro B accipi $\int x ds$. Sit igitur pro A, $P = dq$ et pro B, $P = d \cdot xq$. Unde haec oritur aequatio

$$adq = d \cdot xq \quad \text{seu} \quad aq = xq - b .$$

Scribatur x loco $x - a$, habebitur $xq = b$ seu $xdy = bds$, quae est aequatio pro catenaria.

28. Hic non possum, quin annotem, nisi s fuisset in omnibus curvis eiusdem longitudinis et propterea in B reiici potuisset, problema ex formulis resolvi non potuisse, quia huiusmodi forma $\frac{\int x ds}{s}$ in iis non reperitur. Potest quidem ad propiorem reduci sumendo differentiali iterumque praeponendo signo summatorio, ut tota quantitas signum $\int$ habeat preafixum, sitque hoc modo $B = \int \frac{ds \int s dx}{s^2}$. Verum, quia haec quantitas $\frac{\int s dx}{s^2}$ in T, quippe quae littera semper quantitatem integratam denotat, non comprehenditur, nihil iuvat ad hoc tabula. Nam quoniam in T non inesse possunt differentialia, facile intelligitur neque integralia inesse posse. Hanc ob rem pro huiusmodi

casibus formulae erunt etiam eruendae. Inveni autem, si haec $\int (s^n \int s\,dx)\,ds$ fuerit proposita, fore

$$P = c^{\int \frac{sq\,ds\,dx - n\,ds\,dq \int s\,dx}{s^2 q\,dx + s\,dq \int s\,dx}} (s^{n+1} q\,dx + s^n\,dq \int s\,dx) .$$

Quae in casu proposito, quo est $n = -2$, dat

$$P = c^{\int \frac{s\,q\,ds\,dx + 2\,ds\,dq \int s\,dx}{s^3\,q\,dx + s\,dq \int s\,dx}} \left(\frac{sq\,dx + dq \int s\,dx}{s^2}\right) .$$

Haec ad problema postremum solvendum debet aequalis poni $a\,dq$. Sumtis igitur logarithmis tumque differentialibus prodibit

$$\frac{d\,dq}{dq} = \frac{sq\,ds\,dx + 2\,ds\,dq \int s\,dx}{s^2 q\,dx + s\,dq \int s\,dx} + \frac{2s\,dq\,dx + q\,ds\,dx + d\,dq \int s\,dx}{sq\,dx + dq \int s\,dx} - \frac{2\,ds}{s} .$$

Quae abit in hanc

$$\frac{ss\,q\,dx\,d\,dq}{dq} = 2ss\,dq\,dx ,$$

haecque per $ss\,dx$ divisa in $q\,d\,dq = 2\,dq^2$. Integrando ex hac oritur

$$qq\,dx = -a\,dq$$

atque iterum $x = \frac{a}{q} = \frac{a\,ds}{dy}$ seu $x\,dy = a\,ds$, quae est pro catenaria ut ante.

29. Quo autem generaliores huiusmodi formulas consequamur, sit haec proposita

$$\int T\,dx \int V\,dx .$$

In qua T et V denotant functiones quascunque ipsarum x, y et s, ita ut sit $dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx$ et $dV = G\,ds + H\,dy + K\,dx$. Ex hac formula invenitur

$$P = c^{\int \frac{L\,dq \int V\,dx - TG\,q\,dx - TH\,dx}{(Lq + M) \int V\,dx}} (Lq + M) \int V\,dx .$$

Sit nunc haec formula proposita $\int T\,dx \int V\,dy$, in qua T et V praecedentes habent valores, erit

$$P = c^{\int \frac{L\,dq \int V\,dy + T\,dV - TG\,q\,dy - TH\,dy}{(Lq + M) \int V\,dy + TV}} (TV + (Lq + M) \int V\,dy) .$$

Atque pro hac formula $\int T\,dx \int V\,ds$ reperitur

$$P = c^{\int \frac{L\,dq \int V\,ds + Tq\,dV - TG\,q\,ds - TH\,ds}{(Lq + M) \int V\,ds + TVq}} (TVq + (Lq + M) \int V\,ds) .$$

Huiusmodi tres inveniuntur etiam, si sumatur $T\,dy$ vel $T\,ds$ loco $T\,dx$. Has autem omnes, prout eas inveni, tanquam tabulae continuationem adiicio.

Proprietates propositae *Valores litterae P respondentes*

XVI. $\int T dx \int V dx$,

$$P = c^{\int \frac{Ldq \int V dx - TG\,q\,dx - TH dx}{(Lq + M)\int V dx}} (Lq + M) \int V dx$$

XVII. $\int T dx \int V dy$,

$$P = c^{\int \frac{Ldq \int V dy + TdV - TGq dy - TH dy}{(Lq + M)\int V dy + TV}} (TV + (Lq + M) \int V dy)$$

XVIII. $\int T dx \int V ds$,

$$P = c^{\int \frac{Ldq \int V ds + Tq dV - TGq ds - TH ds}{(Lq + M)\int V ds + TVq}} (TVq + (Lq + M) \int V ds)$$

XIX. $\int T dy \int V dx$,

$$P = c^{\int \frac{Ldq\,dy \int V dx - TG\,q\,dx\,dy - TH dx\,dy}{(Lq\,dy + M\,dy)\int V dx - d\cdot T \int V dx - TV dx}} ((Lq dy + M dy) \int V dx - d \cdot T \int V dx)$$

XX. $\int T dy \int V dy$,

$$P = c^{\int \frac{Ldy dq \int V dy + TdV dy - TGq dy^2 - TH dy^2}{(Lq\,dy + M dy)\int V dy + TV dy - d\cdot T \int V dy - VT dy}} ((Lq dy + M dy) \int V dy + TV dy - d \cdot T \int V dy)$$

XXI. $\int T dy \int V ds$,

$$P = c^{\int \frac{Ldy\,dq \int V ds + Tq dV dy - TGq ds dy - TH ds dy}{(Lq\,dy + M dy)\int V ds + TVq\,dy - d\cdot T \int V ds}} ((Lq dy + M dy) \int V ds + TVq dy - d \cdot T \int V ds)$$

XXII. $\int T ds \int V dx$,

$$P = c^{\int \frac{Lds\,dq \int V dx - TG\,ds\,dx - TH\,ds\,dx}{(Lq\,ds + M ds)\int V dx - d\cdot Tq \int V dx}} ((Lq ds + M ds) \int V dx - d \cdot Tq \int V dx)$$

XXIII. $\int T ds \int V dy$,

$$P = c^{\int \frac{Lds dq \int V dy + TdV ds - TG\,q ds dy - TH ds dy}{(Lq ds + M ds)\int V dy + TV ds - d\cdot Tq \int V dy}} ((Lq ds + M ds) \int V dy + TV ds - d \cdot Tq \int V dy)$$

XXIV. $\int T ds \int V ds$,

$$P = c^{\int \frac{Lds\,dq \int V ds + Tq dV ds - TG\,q\,ds^2 - TH ds^2}{(Lq ds + M ds)\int V ds + TVq\,ds - d\cdot Tq \int V ds}} ((Lq ds + M ds) \int V ds + TVq ds - d \cdot Tq \int V ds)$$

Estque ubique $dT = Lds + Mdy + Ndx$ et $dV = Gds + Hdy + Kdx$.

30. Quo usus harum formularum melius intelligatur, quaeri oporteat inter omnes curvas, quas catena cuiuscunque crassitiei formare potest, eam, quae habeat centrum gravitatis suum a recta Oo remotissimum. Patet hic

alteram conditionem omnes curvas eiusdem ponere longitudinis, ex qua oritur $P = dq$, alteram respicere distantiam centri gravitatis a recta Oo, quae hac formula exprimitur $\frac{\int x dS}{S}$, ubi S pondus catenae oa repraesentat. Haec vero, ut ad formam in tabula contentam reducatur, differentietur, et prodibit $\frac{Sx dS - dS \int x dS}{SS}$ vel ponendo $\int S dx + \int x dS$ loco Sx hoc $\frac{dS \int S dx}{SS}$. Quare huius integrale $\int \frac{dS \int S dx}{SS}$ erit $= \frac{\int x dS}{S}$. Sit $dS = t ds$, est enim S functio ipsius s, erit hac expressione cum vigesima secunda comparata $T = \frac{t}{SS}$ et $V = S$. Atque $L = \frac{S\sigma - 2tt}{S^3}$ posito $dt = \sigma ds$, $G = t$ et $M = N = H = K = 0$. Ex quibus prodit

$$P = c^{\int \frac{(2tt - S\sigma) ds\, dq \int S dx + St^2 q\, ds\, dx}{S^2 t q dx + S t dq \int S dx}} \left(\frac{Stq dx + t dq \int S dx}{SS} \right),$$

quod ergo aequale debet poni adq. Sumantur logarithmi et deinde differentialia, prodibit

$$2SSt dq dx + SS\sigma q ds dx = \frac{SSt q dx\, ddq}{dq},$$

quae per $SStqdx$ divisa et integrata dat $qqtdx = adq$; quae, pro q substituto $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dS}{ds}$ pro t, iterum potest integrari proditque $Sdy = adx$. Haeque exprimit naturam catenariae, cuius pondus se habet ad longitudinem, ut S ad s. Potuisset quidem eadem aequatio multo facilius inveniri, si in $\frac{\int x dS}{S}$ neglexissem denominatorem, quippe qui per priorem conditionem debet in omnibus curvis esse idem. Verum, quia hoc fortuito accidit, malui uti methodo directa, praesertim cum constituissem usum harum formularum ostendere.

31. His de prima et secunda classe expositis multo erit facilius tertiam sequentesque aggredi. Atque a tertia incipiendo, ut iam vidimus, omnia ad eam pertinentia problemata in hoc universali comprehenduntur, ut quaeratur curva, quae inter omnes et proprietate A et proprietate B simul aequaliter praeditas contineat proprietatem C maximo minimove gradu. Ad huiusmodi problemata solvenda necesse est quatuor curvae invenienda elementa considerare (Fig. 4). Hanc ob rem figuram quartam ita institui, ut quatuor elementa, ab, bc, cd et de exhibeantur, quae ut in praecedentibus figuris ad aequalia

axis OA elementa AB, BC, CD et DE referuntur. Totidem igitur erunt etiam applicatarum elementa bM, cN, dP et eQ consideranda. Maneant ut ante $oa = s$, $OA = x$ et $Aa = y$, erunt

$$AB = BC = CD = DE = dx\ , \quad bM = dy\ , \quad cN = dy + ddy\ ,$$

$$dP = dy + 2ddy + d^3y \quad \text{et} \quad eQ = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y\ ;$$

itemque

$$ab = ds\ , \quad bc = ds + dds\ , \quad cd = ds + 2dds + d^3s \quad \text{et}$$
$$de = ds + 3dds + 3d^3s + d^4s\ .$$

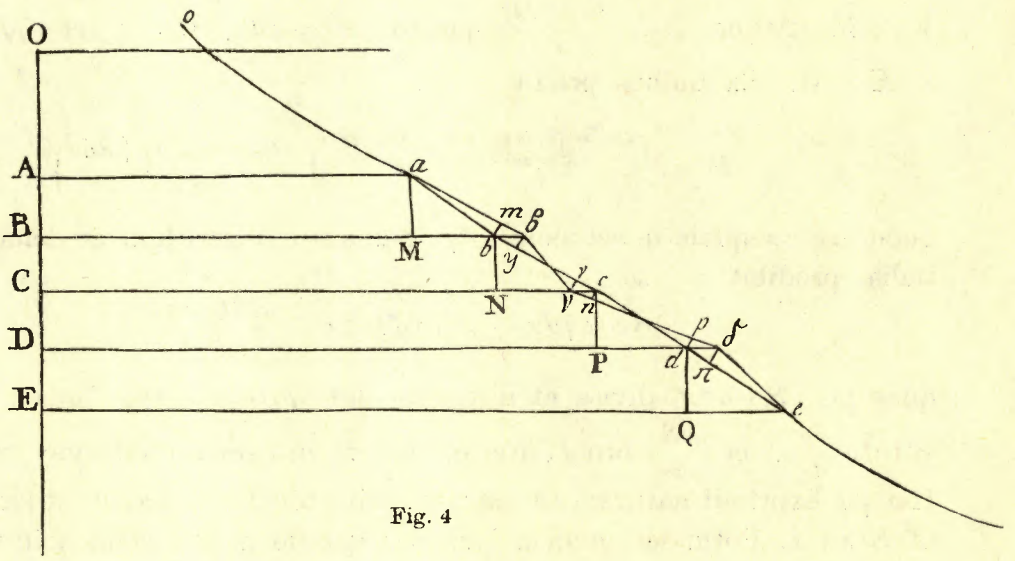


Fig. 4

32. Ducantur deinde etiam curvae proximae per terminos a et e transeuntis elementa ad eadem axis OA elementa relata $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ et δe. Debebunt ergo quoque ob rationem ante allatam singulae tres propositae proprietates in has duas elementorum quaterniones aequaliter competere. Quamobrem proprietatum propositarum quaelibet et pro elementis ab, bc, cd, de formula exprimatur et pro elementis $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δe; tumque illa ab hac subtrahatur et residuum ponatur $= 0$. Huiusmodi ergo tres in quovis casu prodibunt aequationes, quae omnes talem habebunt formam $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma + R \cdot d\delta = 0$. Etenim singula tam applicatarum, quam arcuum incrementa vel decrementa possunt, ut ante est factum, ad haec $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ reduci. Atque P, Q et R prorsus in s, y et x dabuntur neque ab hoc assumto situ proximo pendebunt. Quare cum huiusmodi aequationes $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma + R \cdot d\delta = 0$ tres obtineantur, poterunt particulae $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ eliminari;

quo facto resultabit aequatio ab illis liberata haecque determinabit naturam curvae quaesitae oa.

33. Saepe et potissimum in casibus simplicioribus accidit, ut sit

$$Q = P + dP \quad \text{et} \quad R = P + 2dP + ddP \ .$$

Atque ad huiusmodi formam convenit aequationem, quoties aliam habuerit, reducere, si fieri potest, vel multiplicanda vel dividenda ea. Si autem ex omnibus tribus proprietatibus propositis ad tales aequationes perventum fuerit, facile erit ex iis aequationem pro curva quaesita formare; hoc enim tantum opus est, ut quantitatum in singulis pro P prodeuntium sumantur quaecunque multipla eorumque summa ponatur $= 0$. Nam si tres habeantur huiusmodi aequationes

$$P \cdot b\beta - (P + dP)\, c\gamma + (P + 2dP + ddP)\, d\delta = 0 \ ,$$

$$p \cdot b\beta - (p + dp)\, c\gamma + (p + 2dp + ddp)\, d\delta = 0$$

et

$$\pi \cdot b\beta - (\pi + d\pi)\, c\gamma + (\pi + 2d\pi + dd\pi)\, d\delta = 0 \ ,$$

prodibit eliminatis $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ haec aequatio

$$pd\pi ddP - \pi dpddP + \pi dPddp - Pd\pi ddp + Pdpdd\pi - pdPdd\pi = 0 \ .$$

Ex qua integrata reperitur $P + mp + n\pi = 0$, in qua m et n quantitates quascunque constantes designant. Patet ergo veritas regulae datae.

34. Proposita sit pro quapiam proprietate haec quantitas $\int y^n dx$. Erit ob dx constans

$$Aa^n + Bb^n + Cc^n + Dd^n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n + D\delta^n \ ,$$

cuius aequationis si illud membrum ab hoc subtrahatur, remanebit

$$n \cdot Bb^{n-1} \cdot b\beta - n \cdot Cc^{n-1} c\gamma + n \cdot Dd^{n-1} \cdot d\delta = 0 \ .$$

Quae cum iam habeat formam praescriptam, erit $P = n \cdot Bb^{n-1} = ny^{n-1}$. Perspicitur porro, si assumta fuisset $\int Y dx$, ubi Y denotat functionem quamcunque ipsius y, proditurum fuisse $P = dY : dy$. Quamobrem formula prima in tabula superiore etiam pro classe hac tertia valebit. Si sit proposita haec formula $\int x^n dy$, erit

$$OA^n \cdot bM + OB^n \cdot cN + OC^n \cdot dP + OD^n \cdot eQ$$

$$= OA^n(bM + b\beta) + OB^n(cN - b\beta - c\gamma) + OC^n(dP + c\gamma + d\delta) + OD^n(eQ - d\delta).$$

Hinc fit

$$b\beta(OA^n - OB^n) - c\gamma(OB^n - OC^n) + d\delta(OC^n - OD^n) = 0 ,$$

quae cum habeat formam praescriptam, apparet esse $P = -nx^n dx$ atque simul intelligitur formulam secundam tabulae in hac tertia classe etiam locum habere. Generatim vero videre licet, si in praescripta formula $\int T dx$, $\int T dy$, $\int T ds$, T ab s non pendeat, statim ad aequationem requisitam formam habentem perveniri atque P eundem retinere valorem, quem habet in tabula praecedente. Valent ergo in tertia classe etiam formulae I, II, III, IV, V, VI, VII, imo quoque XIII et XIV. Atque non solum in tertia, sed etiam omnibus sequentibus classibus subsistunt.

35. Cum itaque dictae formulae in omnibus classibus usurpari possint, in promtu erit problema cuiuscunque classis propositum resolvere, si modo proprietates, quae in illo occurrunt, in istis tabulae formulis contineantur. Tum vero sequens regula, quae priori similis est, debet adhiberi; pro singulis scilicet proprietatibus, quae in problemate afferuntur, quaerendi sunt valores litterae P ex tabula eorumque tum sumantur multipla quaecunque et horum summa fiat aequalis nihilo; quo facto aequatio proveniens exponet naturam curvae quaesitae. Ut si invenienda esset curva, quae inter omnes, quae sunt eiusdem longitudinis et eandem comprehendunt aream et circum axem Oo conversae generant solida aequalia, producat circa hunc eundem axem rotata solidum minimae superficiei. Occurrunt hic quatuor proprietates, quae omnes in designatis formulis continentur. Ex prima, quae dat formulam $\int ds$, fit $P = dq$; ex secunda, quae dat $\int y dx$, fit $P = dx$, ex tertia contenta formula $\int x x dy$ fit $P = x dx$ et ex quarta contenta formula $\int x ds$ fit $P = d \cdot xq$. Quocirca aequatio pro curva quaesita erit

$$adq + bdx + 2cxdx + d \cdot xq = 0$$

seu haec

$$aq + bx + cx^2 + xq = f ,$$

hoc est

$$ady + bxds + cx^2 ds + xdy = fds ,$$

quae innumerabiles curvas in se comprehendit.

36. Antequam autem eas formulas pro tertia classe contemplor, in quibus T etiam ab s pendet, afferam quaedam exempla, ad quae solvenda memoratae formulae sufficiunt. Sit igitur propositum curvam invenire, quae inter omnes eiusdem longitudinis et eandem aream comprehendentes generet circa axem Oo conversa maximum solidum. Tres proprietates, quae hic occurrunt, sunt $\int ds$, $\int y dx$ et $\int x^2 dy$, quibus respondent hi ipsius P valores dq, dx et xdx. Ergo curva quaesita hanc habebit aequationem

$$adq + bdx + 2xdx = 0 \quad \text{seu} \quad aq + bx + xx = c \,,$$

id est

$$ady + bxds + xxds = cds \,.$$

Quaeratur nunc inter omnes iterum curvas eiusdem longitudinis et eiusdem areae curva, super qua grave descendat celerrime seu tempore brevissimo. Hic pro prioribus duabus proprietatibus habet P hos valores dq et dx, pro tertia autem, cuius haec est formula $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$, hunc $d \cdot \frac{q}{\sqrt{x}}$. Habebitur ergo pro curva quaesita haec aequatio

$$adq + dx + bd \cdot \frac{q}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{seu} \quad aq + x + \frac{bq}{\sqrt{x}} = c \,,$$

id est

$$ady + xds + \frac{bdy}{\sqrt{x}} = cds \,.$$

Invenienda sit etiam curva, quae inter omnes eiusdem areae et circa axem Oo rotatas aequalia solida generantes producat circa eundem axem conversa solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum minimam patiatur resistentiam. Priores duae conditiones dant pro P hos valores dx et xdx, posterior vero, cuius formula est $\int \frac{xdx^3}{ds^2}$, hunc $d \cdot \frac{xdy}{ds^4}$. Erit ergo in curva quaesita

$$adx + 2bxdx + d \cdot \frac{xdx^3 dy}{ds^4} = 0 \quad \text{seu} \quad ax + bxx + \frac{xdx^3 dy}{ds^4} = c \,.$$

Quae, si ponatur $c = 0$ et x augeatur constante quadam vel minuatur, abit in hanc $xds^4 = adx^3 dy$, quae aequatio est pro curva algebraica, dat enim integrata hanc aequationem quarti ordinis

$$y^4 - 2by^3 + 2x^2 y^2 - 18bx^2 y + x^4 + 27b^2 x^2 = 0 \,,$$

vel

$$y^4 + 6by^3 + 2x^2 y^2 + 12b^2 y^2 - 10bx^2 y + 8b^3 y - b^2 x^2 + x^4 = 0 \,.$$

Haec etiam prodiisset, si a et c fuissent positae $= 0$. Ex quo sequitur hanc aequationem dare curvam minimae resistentiae solidum generantem inter omnes curvas eiusdem capacitatis solida producentes.

37. Quanquam autem huiusmodi problemata, quoties formula occurrit, quae in tabula ad talem referenda est, in qua T etiam in s determinatur, iuxta datam regulam resolvi nequeunt, quia non habetur valor ipsius P pro hac tertia classe, tamen saepe fieri potest, ut nihilominus facile sit solutionem perficere. Ex collatione enim formularum datas proprietates exhibentium saepe eae in alias possunt transmutari, quae in definitis formulis contineantur. Ut si oporteat inter omnes curvas eiusdem longitudinis et eiusdem areae eam determinare, in qua $\int s dx$ sit maximum vel minimum. Pertinet haec formula $\int s dx$ ad octavam, qua uti in tertia et sequentibus classibus non licet. Verum quia $\int s dx = sx - \int x ds$ atque per primam proprietatem praescriptam s in omnibus curvis debet esse eiusdem longitudinis, habebit sx valorem constantem adeoque $\int x ds$ debebit quoque esse minimum vel maximum. Hanc ob rem pro hoc problemate hae tres formulae poterunt recipi $\int ds$, $\int y dx$ et $\int x ds$ ex hisque solutio inveniri. Habebit enim P tres hos valores dq, dx et $d \cdot xq$, ex quibus pro curva quaesita sequens obtinetur aequatio

$$aq + bx + xq = c \quad \text{seu} \quad ady + bxds + xdy = cds .$$

Quae, nisi hoc compendio usi essemus, difficillime eruta fuisset. Quando vero huiusmodi reductiones locum habeant, facilius est quovis casu oblato perspicere, quam per regulam definire.

38. Consideremus tamen huiusmodi formulas, in quibus etiam s in T ingreditur, sitque propositum, ut $\int s^n dx$ in utroque elementorum quaternione sit idem. Erit ergo ob dx constans

$$oa^n + ob^n + oc^n + od^n = oa^n + o\beta^n + o\gamma^n + o\delta^n .$$

Est vero

$$o\beta^n - ob^n = n \cdot ob^{n-1} q \cdot b\beta , \quad o\gamma^n - oc^n = n \cdot oc^{n-1}(-dq \cdot b\beta - (q + dq)c\gamma)$$

et

$$o\delta^n - od^n = n \cdot od^{n-1}(-dq \cdot b\beta + (dq + ddq)c\gamma + (q + 2dq + ddq)d\delta) .$$

Fit igitur

$$b\beta(ob^{n-1} \cdot q - oc^{n-1} \cdot dq - od^{n-1} \cdot dq) - c\gamma(oc^{n-1}(q + dq) - od^{n-1}(dq + ddq)) + d\delta \cdot od^{n-1}(q + 2dq + ddq) = 0 .$$

Et generatim, si assumta fuisset haec formula $\int T dx$ significetque T functionem quamcunque ipsius s, ita ut sit $dT = Lds$, proditura fuisset aequatio ista

$$\begin{gathered} b\beta(Lq - (2L + 2dL + ddL)dq) \\ - c\gamma(Lq + qdL - dLdq - Lddq - 2dLddq - dqddL - ddLddq) \\ + d\delta(L + 2dL + ddL)(q + 2dq + ddq) = 0 . \end{gathered}$$

Hae vero aequationes nullo modo ad talem formam

$$b\beta \cdot P - c\gamma(P + dP) + d\delta(P + 2dP + ddP) = 0$$

reduci possunt. Quamobrem eae aliter adhiberi non poterunt, nisi ut cum duabus reliquis aequationibus, quas alterae conditiones suppeditant, coniungatur et re ipsa elementa $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ eliminentur. Habeant autem reliquae duae aequationes talem formam et sint

$$b\beta \cdot p - c\gamma(p + dp) + d\delta(p + 2dp + ddp) = 0$$

et

$$b\beta \cdot r - c\gamma(r + dr) + d\delta(r + 2dr + ddr) = 0 .$$

Illa vero aequatio sit brevitatis gratia $b\beta \cdot A - c\gamma \cdot B + d\delta \cdot C = 0$. Ex iis si eliminentur $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$, prodibit ista aequatio

$$\begin{gathered} A(pdr - rdp + pddr - rddp + dpddr - drddp) \\ - B(2pdr - 2rdp + pddr - rddp) + C(pdr - rdp) = 0 \end{gathered}$$

vel, si ponatur $r = pt$, haec

$$\begin{gathered} A(ppdt + ppddt + 2pdpdt + pdpddt - pdtddp + 2dp^2 dt) \\ - B(2ppdt + ppddt + 2pdpdt) + Cppdt = 0 . \end{gathered}$$

Quae determinabit naturam curvae quaesitae. Poterunt autem loco aequationis $b\beta \cdot A - c\gamma \cdot B + d\delta \cdot C = 0$ omnes aequationes, quae ex quibuscunque formulis oriuntur, substitui. Atque hoc modo omnia tertiae classis problemata solventur, in quibus duae saltem conditiones ad formulas in hac classe locum habentes deducunt.

39. In nostro quidem casu, si problema fuerit propositum, ut inter omnes curvas proprietates A et B habentes ea inveniatur, in qua $\int T dx$ (ubi $dT = Lds$) sit maximum minimumve atque proprietates A et B ad has aequationes

$$b\beta \cdot p - c\gamma(p + dp) + d\delta(p + 2dp + ddp) = 0$$

et

$$b\beta \cdot r - c\gamma(r + dr) + d\delta(r + 2dr + ddr) = 0$$

reducantur, reperietur pro curva quaesita sequens aequatio

$$\begin{aligned} &3Lpdrddq - 3Lrdpddq + pqdrddL - rqdpddL \\ &+ 2Lrdqddp - Lqdrddp + rqdLddp - 2Lpdqddr \\ &+ Lqdpddr - pqdLddr + 4pdLdrdq - 4rdLdpdq = 0 , \end{aligned}$$

quae facta substitutione $r = pt$ in hanc abit

$$\begin{aligned} &Lpqdpddt - 2Lppdqddt - ppqdLddt + 3Lppdtddq + ppqdtddL \\ &- Lpqdtddp + 2Lqdp^2dt - 4Lpdpdqdt + 4ppdLdqdt - 2pqdLdpdt = 0 . \end{aligned}$$

Si altera conditio ponat areas aequales, ita ut sit $p = dx$ et dp et $ddp = 0$, prodibit ista aequatio

$$\frac{ddr}{dr} = \frac{3Lddq + qddL + 4dLdq}{2Ldq + qdL} .$$

Si praeterea fuerit $T = s$, erit $L = 1$ et dL et $ddL = 0$. Quocirca habebitur pro curva quaesita ista aequatio $\frac{2ddr}{dr} = \frac{3ddq}{dq}$ et integrando

$$dxdr^2 = adq^3 .$$

Si tertia conditio requirat omnes curvas eiusdem longitudinis, erit $r = dq$, proveniet igitur haec aequatio

$$addq^2 = dq^3 dx \quad \text{vel} \quad \frac{addq}{\sqrt{dq}} = dq\sqrt{dx} ,$$

quae integrata dat

$$a\sqrt{dq} = q\sqrt{dx} + b\sqrt{dx}$$

seu

$$\frac{adq}{(b+q)^2} = dx \quad \text{atque} \quad x = \frac{a}{b+q} + c = \frac{a+cq}{b+q} .$$

Quae est eadem, quam pro eodem casu in paragrapho 37 invenimus.

DE LINEA CELERRIMI DESCENSUS IN MEDIO QUOCUNQUE RESISTENTE

Commentatio 42 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1734/5), 1740, p. 135—149

1. Quae curvae ad certum quendam motum producendum in vacuo non multo labore inveniuntur, eaedem in medio resistente non solum laborem multo maiorem, sed etiam plus sollertiae et cautionis requirunt. Saepenumero quoque evenit, ut multa problemata in hypothesi medii resistentis solutionem vel omnino respuant vel in particularibus tantum casibus admittant. Cuiusmodi est problema tautochronarum, de quo, an in alia resistentiae hypothesi praeter simplicem et duplicatam celeritatum rationem resolvi queat, vehementer dubito.

2. Pertinet huc quoque problema lineae brachystochronae seu celerrimi descensus, quod a Celeberrimo IOHANNE BERNOULLI in hypothesi vacui Geometris propositum mox plures easque differentes nactum est solutiones, quas in Actis Lipsiensibus, Transact. Angl., Comment. Parisinis pluribusque aliis libris videre licet. Idem autem problema in medii resistentis hypothesi ego primum in Actis Lipsiensibus A. 1726[1]) solvendum proposui cum ob eius non contemnendam elegantiam tum ob singularem circumspectionem, qua in eius solutione uti oportet, ne quis in errorem incidat.

3. Postquam autem hoc problema proposuissem, Celeberrimus HERMANNUS id dignum indicavit, cuius solutionem dissertationi de motibus variatis Tom. II. Comment. insereret[2]). Sed copia rerum, quas in hac dissertatione pertractavit, viro ceterum perspicacissimo non permisisse videtur, ut hoc problema, quod paucis tantum attigerat, satis perpenderet et solutionem inventam accurate examinaret. Ex quo factum est, ut curvae ab illo assignatae problemati non conveniant nec brachystochronismi proprietatem possideant.

1) Confer Commentationem E 1, huius editionis vol. II, 6. C. C.

2) Confer Commentarios academiae scientiarum Petropolitanae 2 (1727), 1729, p. 139, nec non praefationem voluminis praecedentis. C. C.

Monui etiam hac de re beatae memoriae Virum per litteras ipsique meam solutionem a sua discrepantem transmisi, ut in causam discriminis inquireret, ad quae mihi respondit se utique de sua solutione dubitare coepisse et, quam primum negotia concessura essent, emendationem se perficere velle, quam etiam, nisi mors intervenisset, pro eius eximia integritate iam certe haberemus.

4. Quod igitur ipse fecisset, si vixisset, non arbitror quenquam aegre laturum, si idem ego fecero atque eius solutionem correxero. Hoc non solum non iniquum puto, sed etiam ad id me obstrictum credo, ne forte posthac alii sint acessuri, qui Viri eximii famam et existimationem isto lapsu imminuere sustineant. Atque cum ostendero, quantam circumspectionem ad huiusmodi errores evitandos adhiberi oporteat, tum unusquisque eo facilius Viro defuncto hoc erratum condonabit, tum etiam meum institutum non reprehendet, quo genuina methodo problema a me propositum resolvere statui.

5. Praecipuum, ad quod in solutione huius problematis attendere debemus, est lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod dispositio duorum elementorum contiguorum curvae quaesitae determinatur, quo corpus ea breviori tempore absolvat descendendo, quam quaevis alia elementa intra eosdem terminos posita. Huiusmodi propositio habetur a HUGENIO demonstrata eaque usus est HERMANNUS in sua solutione; sed, uti mox apparebit, plus ei tribuit, quam oportebat, atque ad restrictionem, quam ista propositio requirit, non satis attendebat. Quamobrem et hoc Lemma HUGENIANUM et aliud latius patens atque ad quosvis casus accommodatum in medium proferam.

6. Oporteat igitur in recta FG (Fig. 1) definire punctum M, ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a descendente corpore tempore brevissimo percurrantur; sit autem celeritas corporis supra $FG = m$ et infra eam $= n$, quocunque assumto puncto M in FG. His igitur positis debebit $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n}$ esse minimum, quia hac quantitate tempus per LMN assignatur. Quod ut efficiatur, puncto M proximum m est accipiendum et ductis Lm, mN tempora per LMN et LmN aequalia facienda. Hinc ergo habebitur

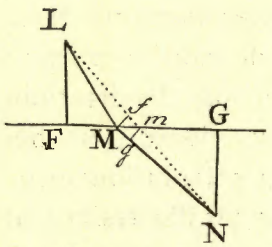


Fig. 1

$$\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n} = \frac{Lm}{m} + \frac{mN}{n},$$

ex quo descriptis centris L et N arculis Mf et mg prodibit haec aequatio $\frac{mf}{m} = \frac{Mg}{n}$ seu ista analogia $mf : Mg = m : n$. Est vero mf ad Mg ut cosinus

anguli LMF ad cosinum anguli GMN. Quocirca cosinus angulorum, quos haec duo elementa cum recta FG constituere debent, sunt celeritatibus, quibus illa elementa describuntur, proportionales. Atque hoc est lemma HUGENIANUM, quo usus HERMANNUS ad suam problematis solutionem pervenit.

7. Quo autem perspiciatur, quam late pateat hoc lemma et quibus in casibus possit adhiberi, ad hoc est advertendum, quod in eo ponitur elementa omnia infra rectam FG sumta eadem celeritate n absolvi. Quamobrem, nisi corpus in hisce omnibus elementis, puncto M ubicunque assumto, eandem habuerint celeritatem, hoc lemma perperam adhibetur atque in erroneam solutionem inciditur. Evenit autem hoc in medio resistente atque ita est factum, ut Celeberrimus HERMANNUS, postquam hoc lemmate in inveniendis brachystochronis in vacuo feliciter esset usus, pro mediis resistentibus eodem lemmate a recta via fuerit seductus.

8. In vacuo tamen etiam res ita est instituenda, ut recta FG ad directionem potentiae sollicitantis ubique sit normalis. Tum enim id, quod requiritur, obtinetur et corpus ex L ad quodque rectae FG punctum descendens idem semper acquirit celeritatis incrementum, ita ut singula elementa intra FG sita aequali celeritate percurrantur. Curva igitur his in casibus, scilicet in vacuo, erit brachystochrona, si celeritas corporis in quovis elemento proportionalis fuerit sinui anguli, quem hoc elementum cum directione potentiae sollicitantis constituit. Quamobrem ope huius regulae inveniri poterit curva celerrimi descensus in vacuo, quaecunque fuerit potentiae sollicitantis lex.

9. Ex his iam satis perspicitur datam regulam inveniendae brachystochronae ad medium resistens accommodari non posse. Namque celeritatis incrementa, quae corpus descendendo ex L ad quaeque rectae FG puncta acquirit, non sunt inter se aequalia, etiamsi recta FG ad potentiae sollicitantis directionem sit normalis, sed praeterea ab inclinatione elementorum percursorum pendent, quemadmodum ex natura resistentiae facile apparebit. Pro his igitur casibus peculiare lemma stabiliri oportet, in quo celeritates per inferiora elementa utcunque variabiles ponuntur pro diversis locis, in quibus punctum M in FG accipitur.

10. Sumtis igitur ut ante punctis M et m proximis et ductis elementis LM, MN ac Lm, mN, sit celeritas per elementa LM et $Lm = q$, celeritas per $MN = q + dt$, at ea per elementum $mN = q + dt + dd\theta$. Incrementum scilicet celeritatis per LM acquisitum ponitur dt et id, quod per Lm acqui-

ritur, ponitur $dt + ddθ$. Quo igitur tempus per LMN fiat minimum, oportet id aequale fieri tempori per LmN. Ex quo habebitur

$$\frac{LM}{q} + \frac{MN}{q+dt} = \frac{Lm}{q} + \frac{mN}{q+dt+ddθ},$$

atque ex hoc prodibit

$$\frac{mf}{q} = \frac{Mg}{q+dt} + \frac{mN \cdot ddθ}{(q+dt)(q+dt+ddθ)}$$

seu

$$(q^2 + 2qdt + dt^2 + qddθ + dtddθ)\, mf = (q^2 + qdt + qddθ)\, Mg + q \cdot mN \cdot ddθ.$$

Est vero

$$mf = \frac{FM \cdot Mm}{LM} \quad \text{et} \quad Mg = \frac{MG \cdot Mm}{LM}.$$

Quibus substitutis et neglectis negligendis orietur

$$q\left(\frac{MG}{LM} - \frac{FM}{LM}\right) = \frac{FM}{LM}\, dt - \frac{LM\, ddθ}{Mm}.$$

Quae, cum $ddθ$ semper ita per Mm determinetur, ut sit huius formae $Z \cdot Mm$, alias quantitates non involvet, nisi quae a puncto M pendebunt.

11. Si aequalia ponantur elementa LF, NG dicanturque dx atque fiat $FM = dy$, $LM = ds$, erit

$$MG = dy + ddy \quad \text{et} \quad MN = ds + dds.$$

Quibus substitutis superior formula transibit in hanc

$$\frac{qdsddy - qdydds}{ds^2} = \frac{dy\, dt}{ds} - \frac{ds\, ddθ}{Mm},$$

seu ob $dsdds = dyddy$ posito dx constante in hanc

$$\frac{qdx^2ddy}{ds^3} = \frac{dydt}{ds} - \frac{ds\, ddθ}{Mm}.$$

Atque hoc est lemma, quo loco HUGENIANI ad inveniendas brachystochronas in medio resistente uti debemus.

12. Sit nunc potentia sollicitans quaecunque, eius vero directio ut ante normalis ad rectam FG. Ponatur ea, dum corpus elementum LM vel Lm describens urget, $= p$ posita vi gravitatis $= 1$. Resistat porro medium in

ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$, atque haec resistentia ita se habeat, ut aequalis sit vi gravitatis 1, si corporis celeritas debita fuerit altitudini c. Iam sit corporis in L celeritas tanta, quanta acquiritur lapsu gravis per altitudinem v. Quibus positis erit vis resistentiae, quae motum corporis ab L ad FG ingredientis retardat, $= \frac{v^n}{c^n}$.

13. A potentia p corpus, sive per LM sive per Lm descendat, idem accipit celeritatis incrementum, quia FG ad directionem potentiae normalis ponitur. Altitudo autem v capiet augmentum $= pdx$. Resistentia autem ita retardabit corpus per LM descendens, ut decrementum altitudinis v sit

$$= \frac{v^n}{c^n} LM ,$$

At si corpus per Lm incedere ponitur, erit decrementum altitudinis v

$$= \frac{v^n}{c^n} Lm .$$

Quare celeritas, qua elementa LM et Lm percurruntur, debetur altitudini v, celeritas vero per MN altitudini

$$v + pdx - \frac{v^n}{c^n} LM$$

et celeritas per mN altitudini

$$v + pdx - \frac{v^n}{c^n} Lm .$$

14. His cum nostro lemmate comparatis habebimus

$$q = \sqrt{v} , \quad q + dt = \sqrt{\left(v + pdx - \frac{v^n}{c^n} LM\right)} = \sqrt{v} + \frac{pdx - \frac{v^n}{c^n} LM}{2\sqrt{v}}$$

adeoque

$$dt = \frac{pdx - \frac{v^n}{c^n} ds}{2\sqrt{v}} .$$

Atque

$$q + dt + dd\theta = \sqrt{\left(v + pdx - \frac{v^n}{c^n} Lm\right)} = \sqrt{v} + \frac{pdx - \frac{v^n}{c^n} Lm}{2\sqrt{v}} .$$

Ex his fiet ergo

$$dd\theta = \frac{v^n (LM - Lm)}{2c^n \sqrt{v}} = - \frac{v^n \cdot FM \cdot Mm}{2c^n \cdot LM \cdot \sqrt{v}}$$

consequenter

$$\frac{dd\theta}{Mm} = - \frac{v^n dy}{2c^n ds \sqrt{v}} .$$

Sequens igitur ex istis orietur aequatio singulis per $2\sqrt{v}$ multiplicatis

$$\frac{2vdx^2ddy}{ds^3} = \frac{pdxdy}{ds} - \frac{v^n dy}{c^n} + \frac{v^n dy}{c^n} \quad \text{seu} \quad 2vdxddy = pdyds^2 .$$

Hanc igitur proprietatem, ut sit $v = \frac{pdyds^2}{2dxddy}$, curva brachystochrona habere debet ex eaque facile erit eam invenire.

15. Quia ii termini, in quos resistentia $\frac{v^n}{c^n}$ ingreditur, sese mutuo destruunt, hoc lemma latissime patet et ad quamcunque resistentiam potest accommodari sine ulla mutatione. Haec est igitur proprietas universalis omnium brachystochronarum tam in vacuo quam in quocunque medio resistente. Sed quo facilius istud lemma memoria teneri queat, aliam formam ei inducemus.

16. Aequatio inventa $2vdxddy = pdyds^2$ si dividatur per ds^3, abit in hanc

$$\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{pdy}{ds} ,$$

in qua $\frac{pdy}{ds}$ exprimit vim normalem resolutione vis sollicitantis p ortam. In altero membro $\frac{2vdxddy}{ds^3}$ significat $-\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ radium osculi curvae LMN secundum plagam F porrectum. At quia curva versus F est convexa, radius osculi in plagam oppositam G erit directus et habet idcirco valorem negativum. Eius ergo longitudo erit $\frac{ds^3}{dxddy}$. Quare posito radio osculi $= r$ et vi normali $= N$, habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} = N$. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua corpus, quatenus in recta linea progredi nequit, curvam, in qua movetur, premit. Hanc ob rem omnis brachystochrona hanc habebit proprietatem, ut vis normalis aequalis sit vi centrifugae.

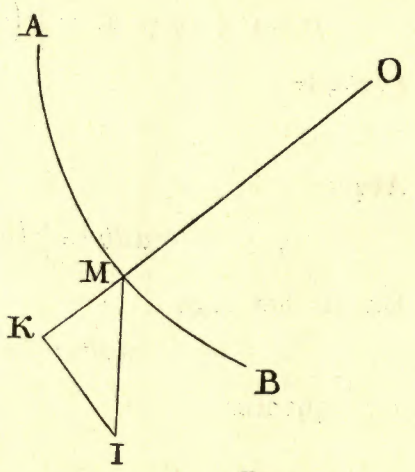


Fig. 2

17. Notandum autem est (Fig. 2) omne corpus, quod a quapiam vi sollicitatum sive in vacuo sive in medio resistente super concava parte curvae cuiusdam AMB incedit, curvam

duplici vi premere, vi scilicet normali a potentia sollicitante orta et vi sua centrifuga. Sit MI potentia sollicitans corpus in M, haec resolvi solet in duas alias MK, KI, quarum illius directio MK normalis est in curvam et propterea vis haec normalis appellatur, alterius KI directio est secundum curvae tangentem et tangentialis vocatur. Perspicuum igitur est harum virium normalem solam corpus ad curvam apprimere. Secundum eandem directionem MK praeterea curva AMB in M premitur a vi centrifuga, quae se habet ad vim gravitatis, ut altitudo celeritatem generans v ad dimidium radii osculi MO.

18. Si ergo curva AMB sive in vacuo sive in medio resistente quocunque ita fuerit comparata, ut corporis super ea descendentis ambae vires, quibus curva premitur, scilicet normalis et centrifuga, inter se fuerint aequales, curva semper erit brachystochrona seu corpus super ea minori tempore ex A ad M descendit, quam super alia quacunque linea per A et M transeunte. Haec igitur aequalitas inter vim normalem et vim centrifugam vera et universalis est lex omnium curvarum brachystochronarum eiusque beneficio in quacunque et potentiae sollicitantis et resistentiae hypothesi in promtu erit curvas brachystochronas determinare.

19. Quia in vacuo secundum *Theorema* HUGENIANUM celeritas proportionalis esse debet sinui anguli, quem curva cum directione potentiae constituit, i. e. ipsi $\frac{MK}{MI}$, erit $\frac{MK^2}{MI^2 \cdot MO}$ proportionale ipsi MK seu $\frac{MK}{MI}$ ipsi $MI \cdot MO$. Omnes igitur brachystochronae in vacuo hanc habent proprietatem, ut sinus anguli, quem directio potentiae cum curva facit, ubique sit proportionalis radio osculi et potentiae sollicitanti coniunctim. Quare huius regulae ope sine celeritatis determinatione omnes brachystochronae in vacuo facile invenientur.

20. Initium autem curvae A, in quo omnes descensus ex quiete fieri debent, semper in eo est loco, in quo curvae tangens in directionem potentiae incidit. In hoc enim loco in vacuo ipsa corporis celeritas propter angulum curvae cum directione potentiae evanescentem fit aequalis 0. In medio autem resistente ipsum motus initium a vacuo non differt et hanc ob rem etiam hoc casu tangens initii curvae cum potentiae directione congruere debet. Huius vero ratio est habenda in adiectione constantium quantitatum, quando aequationem differentio-differentialem brachystochronae integramus et efficere debemus, ut curva datum habeat initium et per datum punctum transeat.

21. Illustremus regulam paragraphi 19 (Fig. 3) pro brachystochronis inveniendis in vacuo datam exemplis sitque potentia sollicitans constans $= g$, eius directio verticalis secundum PM. Brachystochrona vero quaesita sit AM et abscissae in recta horizontali AP per initium curvae transeunte accipiantur. His factis sit $AP = y$, $PM = x$, $AM = s$, eritque sinus anguli, quem PM cum curva conficit, $= \frac{dy}{ds}$ et radius osculi $= \frac{ds^3}{dxddy}$ posito dx constante, qui ob potentiam constantem proportionalis esse debet ipsi $\frac{dy}{ds}$. Fiat igitur $\frac{ds^3}{dxddy} = \frac{ady}{ds}$ seu ob $ddy = \frac{dsdds}{dy}$ hoc modo $ds^3 = adxdds$. Dividendo per ds^2 et integrando prodit $s = C - \frac{adx}{ds}$. Quia facto $s = 0$ fieri debet $dx = ds$, erit $C = a$ et ideo $sds = ads - adx$, quae porro integrata dat $s^2 = 2as - 2ax$ aequationem pro cycloide, ut constat.

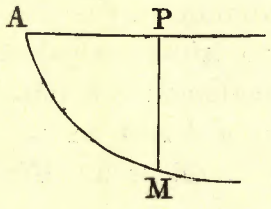


Fig. 3

22. Sit porro C (Fig. 4) centrum virium attrahens in ratione quacunque multiplicata distantiarum, cuius exponens sit m. Curva AM sit brachystochrona pro corpore in vacuo moto. Dicatur $CA = a$, $CM = y$ et perpendiculum CT in tangentem MT ex C demissum $= z$. Vis ergo in M secundum MC corpus trahens erit ut y^m, sinus anguli curvae cum hac directione erit $= \frac{z}{y}$ et radius osculi erit $= -\frac{ydy}{dz}$. Quare vi regulae erit

$$\frac{z}{y} \text{ ut } \frac{y^{m+1}dy}{dz} \quad \text{seu} \quad Azdz = y^{m+2}dy ,$$

cuius integralis est $C + Az^2 = y^{m+3}$. Quia, si $y = a$, fit $z = 0$, erit $C = a^{m+3}$ et consequenter $Az^2 = a^{m+3} - y^{m+3}$, arbitraria A negative sumta. Haecque aequatio omnes brachystochronas, quae circa centra virium existunt, complectitur.

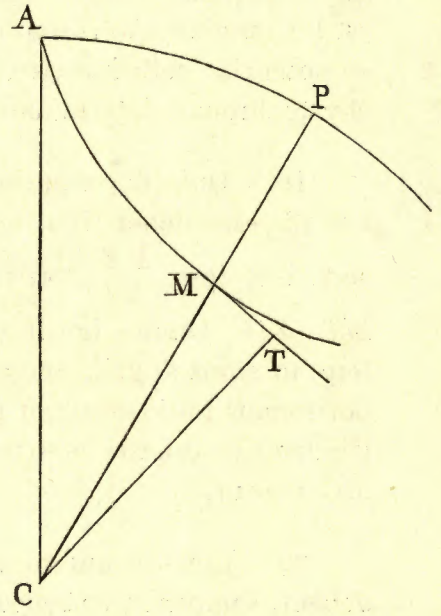


Fig. 4

23. Revertamur autem ad medium resistens in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$. Potentia sollicitans vero ponatur constans $= g$ et habens directionem verticalem ubique ipsi AP parallelam.

Sit AMB (Fig. 5) curva celerrimi descensus invenienda, in qua ponamus $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Celeritas porro in M debita sit altitudini v, quare resistentia in M erit $= \frac{v^n}{c^n}$. Unde ex sollicitatione potentiae et effectu resistentiae simul habebitur $dv = gdx - \frac{v^n ds}{c^n}$. Brachystochronismus vero dat $2vdxddy = gdyds^2$ posito dx constante (paragrapho 14). Ex quibus aequationibus coniunctis exterminata littera v prodibit aequatio pro curva brachystochrona quaesita.

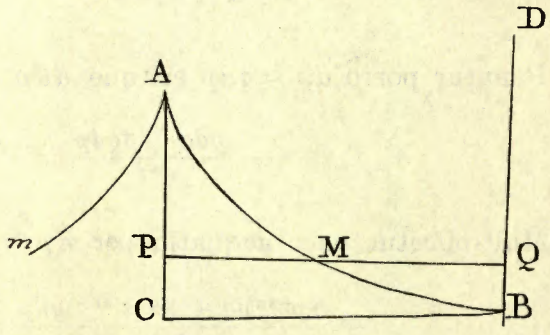


Fig. 5

24. Propter dx constans erit

$$ddy = \frac{dsdds}{dy} \quad \text{ideoque} \quad v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds} .$$

Ergo

$$dv = \frac{gdy^2dds^2 + 2gds^2dds^2 - gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} .$$

His valoribus substitutis in aequatione

$$dv = gdx - \frac{v^n ds}{c^n}$$

habebitur

$$\frac{gdsdy^2d^3s - 3gdy^2dds^2}{2dxdds^2} = \frac{g^n ds^{n+1} dy^{2n}}{2^n c^n dx^n dds^n}$$

seu

$$dsd^3s - 3dds^2 = \frac{g^{n-1} ds^{n+1} dy^{2n-2}}{2^{n-1} c^n dx^{n-1} dds^{n-2}} .$$

Haec aequatio, si medium resistens sit infinite rarum seu in vacuum transmutatur, quo casu fit $c = \infty$, abit in $dsd^3s = 3dds^2$, cuius integralis est $adxdds = ds^3$. Quae quod sit ad cycloidem, paragrapho 21 ostendimus.

25. Ad aequationem autem generalem construendam pono $ds = pdx$, ut sit

$$dds = dpdx \quad \text{et} \quad d^3s = dxddp .$$

Hinc erit

$$dy = dx\sqrt{(p^2 - 1)} \quad \text{et} \quad v = \frac{gpdx(p^2 - 1)}{2dp} .$$

Ipsa autem aequatio abibit in hanc

$$pddp - 3dp^2 = \frac{g^{n-1}p^{n+1}dx^n(p^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}c^n dp^{n-2}}.$$

Ponatur porro $dx = qdp$ eritque $ddp = -\frac{dpdq}{q}$. Quo substituto prodibit

$$-\frac{pdq + 3qdp}{q^{n+1}} = \frac{g^{n-1}p^{n+1}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}.$$

Multiplicetur haec aequatio per np^{-3n-1}; quo facto habebitur

$$-\frac{np^{-3n}dq + 3np^{-3n-1}qdp}{q^{n+1}} = \frac{ng^{n-1}p^{-2n}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}.$$

Cuius integralis est

$$\frac{2^{n-1}c^n}{ng^{n-1}p^{3n}q^n} = \int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}.$$

Ponatur brevitatis gratia

$$\frac{ng^{n-1}}{2^{n-1}c^n}\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}} = P^{-n},$$

quae quantitas concessis quadraturis, si integratio non succedit, semper potest exhiberi. Quo ergo posito erit $p^3q = P$ atque ob $q = \frac{dx}{dp}$ fiet $dx = \frac{Pdp}{p^3}$. Consequenter

$$x = \int\frac{Pdp}{p^3}, \quad s = \int\frac{Pdp}{p^2} \text{ et } y = \int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}.$$

Quare in quacunque medii resistentis hypothesi brachystochrona hoc modo poterit construi.

26. Si resistentia medii sit ut quadratum celeritatis, erit $n = 1$ ideoque

$$P^{-1} = \frac{1}{c}\int\frac{dp}{p^2} = \frac{1}{ac} - \frac{1}{cp} = \frac{p-a}{acp}.$$

Quare fiet

$$P = \frac{acp}{p-a} \quad \text{atque} \quad p^2q = \frac{ac}{p-a} = \frac{p^2dx}{dp} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{acdp}{p^2(p-a)},$$

cuius integralis est

$$x = b + \frac{c}{p} + \frac{c}{a}l\frac{p-a}{p} = b + \frac{cdx}{ds} + \frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds}.$$

In qua aequatione, quia facto $x = 0$ debet esse $ds = dx$, fiet

$$b = -c - \frac{c}{a} l(1 - a) .$$

Habebitur ergo pro curva quaesita haec aequatio

$$x = \frac{c(dx - ds)}{ds} + \frac{c}{a} l \frac{ds - adx}{ds - ads} .$$

Vel si aequatio a logarithmis libera desideretur, haec differentio-differentialis

$$acdxdds = ds^3 - adxds^2$$

posito dx constante. Haec alio modo disposita abit in hanc

$$\frac{acdxdds}{ds^2} = ds - adx ,$$

cuius integralis est

$$s - ax = ac - \frac{acdx}{ds} \quad \text{seu} \quad sds - axds = acds - acdx .$$

Quae integrata dat

$$s = cl \frac{s - ax - ac + c}{c - ac} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{s}{c}} (c - ac) = s - ax + c - ac .$$

Huius curvae punctum infimum B ibi erit, ubi est $s = a(x + c)$. Hoc igitur casu erit

$$AB = cl \frac{1}{1 - a} \quad \text{et} \quad AC = \frac{c}{a} l \frac{1}{1 - a} - c .$$

27. Si autem *Theoremate* HUGENIANO tanquam ad hunc casum idoneo usi essemus, statim hanc habuissemus inde aequationem $v = \frac{ady^2}{ds^2}$. Hincque

$$dv = \frac{2adx^2ddy}{ds^3} = gdx - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-1}} \quad \text{seu} \quad 2adx^2ddy = gdxds^3 - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-4}} .$$

Quae facto $ds = pdx$ abit in

$$\frac{2apdp}{\sqrt{(p^2 - 1)}} = gpx^2 dx - \frac{a^n dx (p^2 - 1)^n}{c^n p^{2n-4}} ,$$

quae iam per se est separata ideoque construi potest. Si ponatur $n = 1$, ut brachystochrona pro medio resistente in duplicata celeritatum ratione prodeat, erit

$$2acdx^2ddy = cgdxds^3 - ady^2ds^2$$

seu

$$2acdx^2dds = cgdxdyds^2 - ady^3ds \ .$$

Quae aequatio, etiamsi lemmate simpliciore nitatur, tamen multo magis est composita et perplexa, quam nostra brachystochrona inventa; id quod per se saepe veritatis criterium esse solet, praecipue si operosior calculus eo deduxerit.

28. Quo autem appareat, qualem figuram brachystochrona nostra in medio secundum celeritatis quadrata resistente habitura sit, aequationem sumamus hanc

$$e^{\frac{s}{c}}(c - ac) = s - ax + c - ac \ .$$

Haec, in seriem converso $e^{\frac{s}{c}}$, abit in hanc

$$(c-ac)\left(1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{1\cdot2\cdot c^2} + \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3\cdot c^3} + \frac{s^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot c^4} + \text{etc.}\right) = s - ax + c - ac \ ,$$

ex qua reperitur posito $\frac{1-a}{a} = k$ haec aequatio

$$x = s - \frac{ks^2}{1\cdot2\cdot c} - \frac{ks^3}{1\cdot2\cdot3\cdot c^2} - \frac{ks^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot c^3} - \text{etc.}$$

Perspicitur ergo k necessario esse debere numerum affirmativum, alias enim fieret $x > s$ quod fieri nequit; erit ergo $a = \frac{1}{1+k}$. Ex hac serie, quia vehementer convergit, facile pro quovis valore ipsius s respondens ipsius x invenietur. Praeterea intelligitur curvam hanc ultra A continuari in Am, quae similis est ipsi AM.

29. Quomodo vero curva ultra B porrigatur, hac ratione investigo. Ducto ex B axe verticali BD in eumque applicata MQ, sit $BQ = PC = u$, arcus $BM = t$. Hoc posito erit

$$s = cl\frac{1}{1-a} - t \quad \text{et} \quad x = \frac{c}{a}l\frac{1}{1-a} - c - u \ ,$$

quibus substitutis haec emergit aequatio, $ce^{\frac{-t}{c}} = au - t + c$ vel haec differentialis $tdt - audt = acdu$. Per seriem vero habebitur

$$au = \frac{t^2}{1\cdot2\cdot c} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot c^2} + \frac{t^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot c^3} - \text{etc.}$$

Quae aequatio prorsus congruit cum ea, quam A. 1729 pro tautochrona ascensui in eadem resistentiae hypothesi inveni[1]). Altera igitur portio curvae ultra axem BD sita erit tautochrona ad descensum pertinens. Habebit ergo curva brachystochrona (Fig. 6) huiusmodi formam $EABCD$ infinitis cuspidibus A, C etc. praeditam, quarum alterni sunt altiores ut A, alterni humiliores ut C. Rami vero ex utraque cuspidis cuiusque parte sunt inter se aequales et similes.

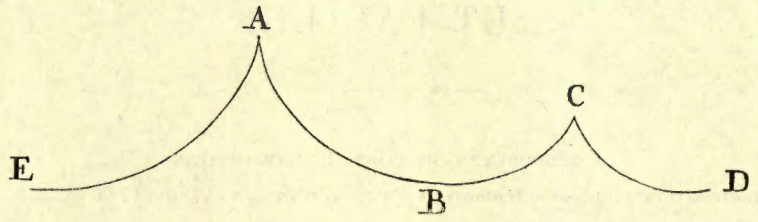


Fig. 6

Elevatio altiorum cuspidum est $\frac{c}{a} l \frac{1}{1-a} - c$, humiliorum vero est $c - \frac{c}{a} l(1+a)$. Ipsi vero rami altiores AB vel AE sunt $= cl \frac{1}{1-a}$ depressiorumque CB, CD longitudo est $= cl(1+a)$. Convenientia ceterum ista inter tautochronam et brachystochronam praeter vacuum etiam in hac resistentiae hypothesi praecipue considerari meretur, et disquirendum restat, num forte in reliquis resistentiae hypothesibus similis analogia locum obtineat? Id quod tautochronarum inventionem perse difficillimam redderet facillimam.

1) Confer Commentationem E 6, huius editionis vol. II, 6. C. C.

CURVARUM MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTIUM INVENTIO NOVA ET FACILIS

Commentatio 56 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 1741, p. 159—190

1. Quanquam hoc problema, quod sub initio huius seculi ab acutissimo Geometra IACOBO BERNOULLI cum erat propositum tum solutum, iam a pluribus eximiis viris tractatum atque diversas solutiones nactum, a me vero demum ante aliquot annos[1]) in latiore sensu prolatum est atque methodo tam facili solutum, ut nihil amplius desiderari posse videatur, tamen nuper in eiusmodi huius generis quaestiones incidi, ad quas solvendas formulae tum temporis a me exhibitae non erant sufficientes, adeo ut coactus fuerim novas formulas latius patentes contemplari atque pro iis ad problema solvendum idoneos valores investigare. In hoc autem negotio occupatus non solum faciliorem quam ante detexi viam ad solutiones huiusmodi problematum perveniendi, sed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaveram, in unicam sum complexus atque praeterea ad alias adhuc latius patentes calculum accommodare licuit.

2. Quo autem calculum, qui pro formulis tantopere compositis modo designandi consueto nimis fieret prolixus et taediosus, tractabiliorem redderem, visum est a recepto signandi modo aliquantum recedere atque alia signa adhibere, quibus cum brevitati tum potissimum distinctioni consuleretur. Sic quantitatem variabilem y situm proximum promotam ita designabo $\overset{\text{I}}{y}$, hancque si denuo in situm proximum transferatur ita $\overset{\text{II}}{y}$; et si ulterius in situm proximum promoveatur, mihi indicabitur per $\overset{\text{III}}{y}$ et ita porro, adeo ut mihi sit

1) Confer commentationem 27 huius voluminis p. 13. C. C.

$$\overset{\text{I}}{y} = y + dy$$
$$\overset{\text{II}}{y} = y + 2dy + ddy$$
$$\overset{\text{III}}{y} = y + 3dy + 3ddy + d^3y \quad \text{etc.}$$

Simili igitur modo in sequentibus erit

$$\overset{\text{I}}{dy} = dy + ddy$$
$$\overset{\text{II}}{dy} = dy + 2ddy + d^3y$$
$$\overset{\text{III}}{dy} = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y$$

atque similiter porro

$$\overset{\text{I}}{ddy} = ddy + d^3y$$
$$\overset{\text{II}}{ddy} = ddy + 2d^3y + d^4y$$
$$\overset{\text{III}}{ddy} = ddy + 3d^3y + 3d^4y + d^5y \quad \text{etc.}$$

3. His praemonitis problemata primae classis aggredior (Fig. 1), in quibus quaeritur curva, quae inter omnes omnino curvas inter eosdem terminos sitas maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Sit igitur oa curva quaesita ad axem OA relata ponaturque $OA = x$, $Aa = y$ et arcus $oa = s$. Tum sumtis duobus abscissae elementis aequalibus $AB = BC = dx$ ducantur applicatae Bb et Cc. Deinde concipiantur duo alia elementa curvae proxima $a\beta$, βc puncta a et c iungentia. Quibus factis manifestum est ex natura maximorum vel minimorum quantitatem, quae pro curva oa maxima vel minima esse debet, eam, sive ad elementa abc sive ad elementa $a\beta c$ referatur, in utroque casu eundem valorem producere debere. Quamobrem differentia inter valores, qui prodeunt ex consideratione tum elementorum abc tum $a\beta c$, si nihilo aequalis ponatur, dabit aequationem, qua natura curvae exprimetur. Ista autem differentia semper ad huiusmodi formam reduci potest $P \cdot b\beta$, in qua P per solas quantitates x, y, s earumque differentialia una cum constantibus determinatur. Quocirca ista aequatio $P = 0$ exprimet naturam curvae quaesitae.

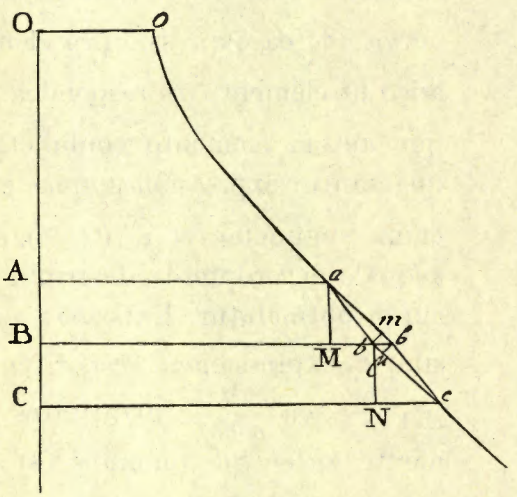


Fig. 1

4. Proposito ergo quocunque problemate, quod inter omnes omnino curvas intra eosdem terminos constitutas determinare iubet eam, quae maximi vel minimi proprietate gaudeat, ex formula, quae maximum vel minimum esse debet, elici oportet valorem ipsius P, qui nihilo aequalis positus dabit aequationem pro curva quaesita. Totum ergo hoc negotium absolvetur, si regula tradatur, cuius ope ex data expressione, quae maximum minimumve esse debet, inveniri queat valor P. Ad huiusmodi autem regulam inveniendam exprimat $\int Q dx$ eam quantitatem, quae in curva quaesita maxima esse debeat vel minima, sitque Q quantitas utcunque composita ex x, y et s horumque differentialibus dx, dy et ds. Seu posito $dy = p dx$, ut sit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$, sit quantitas utcunque composita ex x, y, s et p, ita ut eius differentiale huiusmodi sit habiturum formam

$$dQ = L ds + M dy + N dx + V dp \ .$$

Quae formula utique multo latius patet, quam omnes 16 priores formulae, quas in praecedente dissertatione exhibui.

5. Considerentur ab et bc tanquam curvae inveniendae elementa genuina, dum altera $a\beta$ et βc tantum ad conceptum maximi minimive formandum sint in subsidium vocata. Cum igitur $\int Q dx$ debeat esse maximum vel minimum in curva oa, ea expressio pro elemento ab dabit $Q dx$ et elemento bc vero $\overset{\text{I}}{Q} dx$, adeo ut elemento ab respondeat expressio $Q dx$ et elemento bc haec $\overset{\text{I}}{Q} dx$, utrique autem elemento coniunctim $ab + bc$ ista formula $(Q + \overset{\text{I}}{Q}) dx$. Iam quaerantur expressiones, quae elementis assumtitiis $a\beta$ et βc respondeant; hae enim coniunctae et a $(Q + \overset{\text{I}}{Q}) dx$ subtractae dabunt residuum ipsi $P \cdot b\beta$ aequale et propterea determinabunt valorem ipsius P, ex quo aequatio pro curva obtinebitur. Expressio autem $Q dx$, quae respondet elemento ab, transibit in expressionem respondentem elemento $a\beta$, si loco p seu $\frac{bM}{aM}$ scribatur $p + \frac{b\beta}{dx}$ seu $\frac{\beta M}{aM}$, quantitates enim x, y et s a puncto a, quod utrique elemento ab et $a\beta$ commune est, pendent tantum ideoque invariatae manent.

6. Differentia ergo inter expressiones, quae elementis ab et $a\beta$ respondent, obtinebitur, si $Q dx$ differentietur et loco ds, dy et dx scribatur 0, loco dp vero $\frac{b\beta}{dx}$. Cum autem sit differentiale ipsius $Q dx$

$$= dQ dx = (L ds + M dy + N dx + V dp) dx \ ,$$

erit illa differentia $= V \cdot b\beta$. Porro ex expressione $\overset{\text{I}}{Q}dx$ elemento bc respondente, ubi $\overset{\text{I}}{Q}$ est talis functio ipsarum $\overset{\text{I}}{s}$, $\overset{\text{I}}{y}$, $\overset{\text{I}}{x}$ et $\overset{\text{I}}{p}$, qualis ante erat Q ipsarum s, y, x et p, invenietur expressio respondens elemento βc, si loco $\overset{\text{I}}{y} = Bb$ scribatur $\overset{\text{I}}{y} + b\beta$, loco $\overset{\text{I}}{s} = oa + ab$ vero $\overset{\text{I}}{s} + \beta m = \overset{\text{I}}{s} + \frac{dy \cdot b\beta}{ds}$ atque loco $\overset{\text{I}}{p} = \frac{cN}{bN}$ ponatur $\overset{\text{I}}{p} - \frac{b\beta}{dx}$. Quamobrem differentia inter expressiones elementis bc et βc habebitur, si $\overset{\text{I}}{Q}dx$ differentietur et loco $d\overset{\text{I}}{y}$ scribatur $b\beta$, loco $d\overset{\text{I}}{s}$ vero $\frac{dy \cdot b\beta}{ds}$ atque loco $d\overset{\text{I}}{p}$ ponatur $-\frac{b\beta}{dx}$. Cum igitur sit

$$d\overset{\text{I}}{Q}\,dx = (\overset{\text{I}}{L}d\overset{\text{I}}{s} + \overset{\text{I}}{M}d\overset{\text{I}}{y} + \overset{\text{I}}{N}dx + \overset{\text{I}}{V}d\overset{\text{I}}{p})dx \ ,$$

erit haec differentia

$$= \frac{\overset{\text{I}}{L}dxdy \cdot b\beta}{ds} + \overset{\text{I}}{M}dx \cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V} \cdot b\beta \ .$$

Differentia ergo inter expressiones elementis $ab + bc$ et elementis $a\beta + \beta c$ respondentes erit

$$\left(V + \frac{\overset{\text{I}}{L}dxdy}{ds} + \overset{\text{I}}{M}dx - \overset{\text{I}}{V}\right) b\beta = \left(\frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV\right) b\beta = P \cdot b\beta \ .$$

Aequatio ergo pro curva quaesita erit haec

$$P = \frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV = 0 \quad \text{seu} \quad Ldxdy + Mdxds = dsdV \ ^{1}) \ .$$

7. Si ergo quaerenda sit curva oa, in qua $\int Qdx$ vel maius sit vel minus, quam inter omnes alias curvas intra eosdem terminos sitas, atque Q fuerit functio quaecunque ipsarum x, y, s et p, posito $p = \frac{dy}{dx}$ sequens habebitur regula ad valorem ipsius P inveniendum. Differentietur primo Q et in differentiali ponatur $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ atque $dp = 1$; deinde differentietur $\overset{\text{I}}{Q}$ et in differentiali ponatur $d\overset{\text{I}}{s} = \frac{dxdy}{ds}$, $d\overset{\text{I}}{y} = dx$, $d\overset{\text{I}}{x} = 0$ atque $d\overset{\text{I}}{p} = -1$. His factis haec differentialia duo coniuncta dabunt valorem ipsius P. Ita casu, quo posuimus $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$, prodibit per hanc regulam ut ante

$$P = \frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV \ .$$

1) Vide § 36 huius commentationis p. 78. C. C.

Sit exempli gratia propositum curvam invenire, in qua

$$\int \frac{ds^2}{udy + \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}$$

denotante u functionem quamcunque ipsius x, sit minimum. Posito ergo $dy = pdx$ erit

$$\int Q dx = \int \frac{(1+pp)dx}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1+pp}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}.$$

Erit ergo

$$L = 0,\ M = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{c^2(1+p^2)p - 2pu^2 + u(pp-1)\sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)}}{(pu + \sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)})^2 \sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)}}.$$

Cum autem sit $dV = P = 0$, erit $V = \text{const.}\left[= \frac{1}{a}\right]$ atque

$$(au - u^2)(p^2 - 1) - c^2(p^2+1) = \frac{(2u-a)(1+pp)c^2p + 2pu(au - u^2)}{\sqrt{(c^2 + c^2p^2 - u^2)}},$$

quae reducitur ad hanc

$$dy = \frac{(u^2 - au - cc)dx}{c\sqrt{((u-a)^2 - c^2)}}.$$

8. Ope huius regulae etiam facile erit pro aliis expressionibus valorem ipsius P invenire, id quod exemplo formularum posteriorum dissertationis meae declarabo. Sit expressio, quae maximum minimumve esse debet, $\int Q dx \int R dx$ atque

$$dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp \quad \text{et} \quad dR = Eds + Fdy + Gdx + Idp$$

posito $dy = pdx$. Quod ergo ante erat Q, nunc nobis est $Q\int Rdx$, et quod erat $\overset{\text{I}}{Q}$, nunc erit $\overset{\text{I}}{Q}\int Rdx + \overset{\text{I}}{Q}Rdx$. Prioris autem formulae differentiale est

$$(Lds + Mdy + Ndx + Vdp)\int Rdx + QRdx,$$

unde positis $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ et $dp = 1$ resultat valor $V\int Rdx$. Posterioris autem formulae differentiale est

$$(\overset{\text{I}}{L}\overset{\text{I}}{ds} + \overset{\text{I}}{M}\overset{\text{I}}{dy} + \overset{\text{I}}{N}dx + \overset{\text{I}}{V}\overset{\text{I}}{dp})(\int Rdx + Rdx)$$

$$+ \overset{\text{I}}{Q}Rdx + \overset{\text{I}}{Q}dx(Eds + Fdy + Gdx + Idp),$$

quod iuxta praecepta posito $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $d\overset{\text{I}}{s} = \frac{dxdy}{ds}$, $d\overset{\text{I}}{y} = dx$ et $d\overset{\text{I}}{p} = -1$ dabit hunc valorem

$$\left(\frac{\overset{\text{I}}{L}dxdy}{ds} + \overset{\text{I}}{M}dx - \overset{\text{I}}{V}\right)(\int Rdx + Rdx) + \overset{\text{I}}{Q}Idx \ .$$

His coniunctis et neglectis negligendis fit

$$P = \left(\frac{Ldxdy}{ds} + Mdx\right)\int Rdx - dV\int Rdx - RVdx + QIdx$$
$$= -d\cdot V\int Rdx + dx\left(\frac{Ldy}{ds} + M\right)\int Rdx + QIdx = 0 \ .$$

Quae est aequatio pro curva quaesita.

9. Si aliae etiam expressiones in his non contentae fuerint propositae, quae maximum minimumve esse debeant, semper per regulam datam, qua poni debet $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $d\overset{\text{I}}{s} = \frac{dxdy}{ds}$, $d\overset{\text{I}}{y} = dx$ et $d\overset{\text{I}}{p} = -1$, valor ipsius P et inde simul aequatio pro curva inventa reperietur. Ut invenienda sit curva, in qua $\frac{\int sdx}{\int ydx}$ debeat esse maximum vel minimum, erit

$$Q = \frac{s}{\int ydx} - \frac{y\int sdx}{(\int ydx)^2} \text{ atque } \overset{\text{I}}{Q} = \frac{\overset{\text{I}}{s}}{\int ydx} - \frac{\overset{\text{I}}{s}ydx}{(\int ydx)^2} - \frac{\overset{\text{I}}{y}\int sdx}{(\int ydx)^2} - \frac{\overset{\text{I}}{y}sdx}{(\int ydx)^2} + \frac{2\overset{\text{I}}{y}ydx\int sdx}{(\int ydx)^3}.$$

Hinc differentiando ex Q oritur 0 atque ex $\overset{\text{I}}{Q}$ oritur

$$\frac{dxdy}{ds\int ydx} - \frac{ydx^2dy}{ds(\int ydx)^2} - \frac{dx\int sdx}{(\int ydx)^2} - \frac{sdx^2}{(\int ydx)^2} + \frac{2ydx^2\int sdx}{(\int ydx)^3} = P \ .$$

Neglectis ergo negligendis fiet

$$P = \frac{dxdy\int ydx - dsdx\int sdx}{ds(\int ydx)^2} \ .$$

Posito itaque hoc pro P invento valore $= 0$ prodibit aequatio pro curva quaesita

$$dy\int ydx = ds\int sdx \ .$$

Ponatur $dy = qds$, erit

$$dq\int ydx + qydx = sdx \quad \text{seu} \quad \int ydx = \frac{sdx - qydx}{dq} \ .$$

Quae denuo differentiata posito dx constante dat

$$ydq^2 = dsdq - ydq^2 - qdydq - sddq + qyddq$$

seu

$$2ydq^2 + qdydq - qyddq = dsdq - sddq$$

vel restituto

$$qsds^2ddds^2 + 2sdy^2ddds^2 = 3ydsdyddds^2 + sdsdy^2d^3s - ydy^3d^3s \ .$$

10. Ex his praeceptis iam satis intelligitur, si expressio, quae maximum vel minimum esse debeat, sit non solum ipsarum x, y, s et p functio quaecunque, sed etiam praeter ea integrales formulas contineat; quemadmodum eam tractari atque tandem ad aequationem naturam curvae exprimentem perveniri oporteat. Valet itaque ista methodus pro omnibus expressionibus, quae partim ex integralibus, partim denique ex harum differentialibus sunt conflatae; adeo ut ad omnes omnino quaestiones solvendas sufficere videatur. Interim tamen incidi nuper in quaestionem, quae ad hanc methodum referri non poterat, sed peculiarem solutionem requirebat. Ita autem illa quaestio erat comparata, ut in formula $\int Q dx$, quae maximum minimumve esse debet, praeter x, y, s eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus essent contenta. Facile autem intelligitur, quoties differentialia secundi gradus occurrant, tum hactenus tradita praecepta non valere, sed novam omnino methodum requiri.

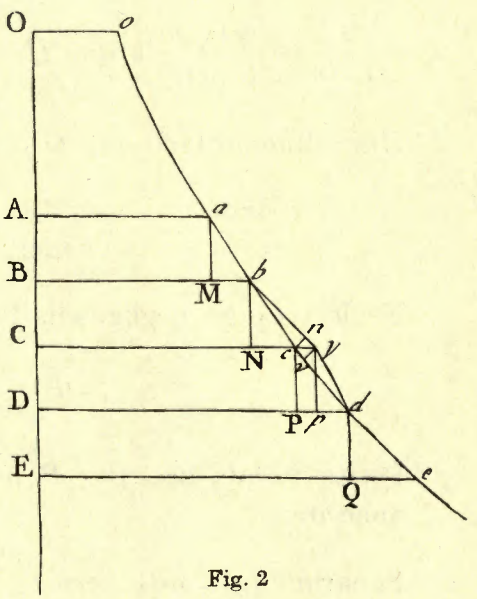


Fig. 2

11. Cum autem differentialia secundi gradus bina elementa afficiant, ita ut translatio puncti b in β differentialia secundi gradus elementi ante ab siti immutent, non difficulter perspicietur ad huiusmodi quaestiones solvendas praeter elementa ab et bc insuper praecedens et sequens in computum duci debere. Sint igitur (Fig. 2) $abcde$ quatuor elementa curvae inveniendae, quorum bina tantum media bcd, ut ante fecimus, in situm proximum $b\gamma d$ transferantur. Ponatur $OA = x$, $Aa = y$ et $oa = s$, atque elementis abscissae x aequalibus sumtis erit

$$Bb = \overset{\text{I}}{y}, \quad Cc = \overset{\text{II}}{y}, \quad Dd = \overset{\text{III}}{y} \quad \text{et} \quad Ee = \overset{\text{IV}}{y} \ .$$

Posito praeterea $dy = pdx$ erit

$$\frac{bM}{dx} = p\ , \quad \frac{cN}{dx} = \overset{\text{I}}{p}\ , \quad \frac{dP}{dx} = \overset{\text{II}}{p} \quad \text{atque} \quad \frac{eQ}{dx} = \overset{\text{III}}{p}\ .$$

Quia denique differentialia secundi gradus in formula proposita inesse ponuntur, fiat $dp = rdx$, ita ut sit

$$ddy = rdx^2 \quad \text{et} \quad dds = \frac{prdx^2}{\sqrt{(1+pp)}}\ .$$

His positis erit

$$r = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{cN - bM}{dx^2} \quad \text{atque} \quad \overset{\text{I}}{r} = \frac{dP - cN}{dx^2} \quad \text{et} \quad \overset{\text{II}}{r} = \frac{eQ - dP}{dx^2}\ .$$

12. Si iam elementa $abcde$ in elementa $ab\gamma de$ transire concipiantur, valores ante inventi incrementa vel decrementa accipient. Fient autem incrementa haec, ut ex inspectione figurae apparet, sequentia: $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 0$; denotant enim ds, dy, dx, dp incrementa ipsarum s, y, x et p, dum punctum c in γ transfertur, haec vero mutatio has quantitates non afficit, sed translato c in γ abibit r in $\frac{\gamma N - bM}{dx^2}$, erit itaque incrementum, quod r interea capit, seu $dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Porro erit

$$\overset{\text{I}}{ds} = 0\ , \quad \overset{\text{I}}{dy} = 0\ , \quad \overset{\text{I}}{dp} = \frac{c\gamma}{dx} \quad \text{et} \quad \overset{\text{I}}{dr} = \frac{dp - \gamma N}{dx^2} - \frac{dP - cN}{dx^2} = -\frac{2c\gamma}{dx^2}\ .$$

Deinceps autem fiet

$$\overset{\text{II}}{ds} = \gamma n = \frac{cN \cdot \gamma c}{bc} = \frac{\overset{\text{I}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\text{I}}{ds}}\ , \quad \overset{\text{II}}{dy} = c\gamma\ , \quad \overset{\text{II}}{dp} = -\frac{c\gamma}{dx}\ , \quad \overset{\text{II}}{dr} = \frac{c\gamma}{dx^2}\ .$$

Denique erit

$$\overset{\text{III}}{ds} = \frac{\overset{\text{I}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\text{I}}{ds}} - \frac{\overset{\text{II}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\text{II}}{ds}} = -c\gamma d \cdot \frac{\overset{\text{I}}{dy}}{\overset{\text{I}}{ds}} \quad \text{atque} \quad \overset{\text{III}}{dy} = 0\ , \quad \overset{\text{III}}{dp} = 0\ , \quad \overset{\text{III}}{dr} = 0\ ;$$

haec enim elementa non amplius a mutatione puncti c afficiuntur.

13. Sit nunc curva invenienda, in qua debeat esse maximum vel minimum $\int Q dx$, in qua expressione Q sit compositum quomodocunque ex x, y, s harumque quantitatum differentialibus tam primi quam secundi gradus; ita ut Q futura sit functio quaecunque ipsarum x, y, s, p et r. Iam quia $\int Q dx$ pro omni curvae portione ab o incipiente debet esse maximum vel minimum,

necesse est, ut tale quoque sit pro elementis $abcde$. Quare $\int Q dx$ eundem valorem habere debebit tam in elementis $abcde$ quam in $ab\gamma de$. Pro elementis autem $abcde$ dat ista formula hunc valorem

$$Q dx + \overset{\text{I}}{Q} dx + \overset{\text{II}}{Q} dx + \overset{\text{III}}{Q} dx ,$$

huius ergo differentiale ex translatione puncti c in γ ortum debet esse $= 0$ vel dabit valorem ipsius $P \cdot c\gamma$. Posito autem

$$dQ = L ds + M dy + N dx + V dp + W dr ,$$

erit pro differentialibus valoribus exhibitis substituendis, ut sequitur:

$$d \cdot Q dx = \frac{W \cdot c\gamma}{dx}$$

$$d \cdot \overset{\text{I}}{Q} dx = \overset{\text{I}}{V} \cdot c\gamma - \frac{2\overset{\text{I}}{W} \cdot c\gamma}{dx}$$

$$d \cdot \overset{\text{II}}{Q} dx = \frac{\overset{\text{II}}{L} dx \overset{\text{I}}{dy} \cdot c\gamma}{\overset{\text{I}}{ds}} + \overset{\text{II}}{M} dx \cdot c\gamma - \overset{\text{II}}{V} \cdot c\gamma + \frac{\overset{\text{II}}{W} \cdot c\gamma}{dx}$$

$$d \cdot \overset{\text{III}}{Q} dx = - \overset{\text{III}}{L} dx d \cdot \frac{\overset{\text{I}}{dy}}{\overset{\text{I}}{ds}} \cdot c\gamma .$$

Quorum valorum summa dabit hanc expressionem

$$P = \frac{ddW}{dx} - dV + \frac{L dx dy}{ds} + M dx$$

neglectis negligendis. Pro curva quaesita ergo habebitur ista aequatio

$$ddW - dV dx + \frac{L dx^2 dy}{ds} + M dx^2 = 0$$

posito perpetuo dx constante.

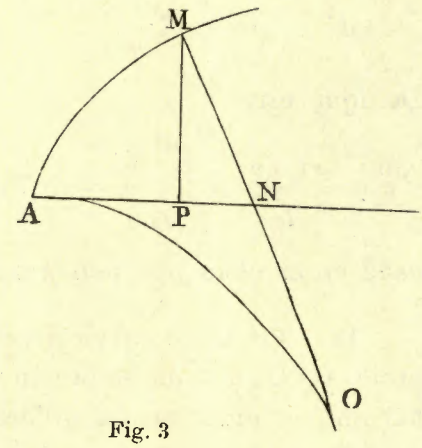


Fig. 3

14. Quo hanc regulam exemplo illustremus (Fig. 3), sit nobis propositum inter omnes curvas per puncta A et M transeuntes eam determinare, quae cum sua evoluta AO minimum spatium AOM comprehendat. Positis ergo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ erit radius osculi $MO = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ posito dx constante. Facto ergo $dy = p dx$ erit

$$ds = dx\sqrt{(1+pp)} \quad \text{et} \quad ddy = dpdx\ ,$$

unde fiet radius osculi

$$MO = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Atque posito $dp = rdx$ erit is $= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r}$. Hinc area AMO erit

$$= -\tfrac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ds}{r} = -\tfrac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^2dx}{r}\ ;$$

oportet ergo, ut sit $\int\frac{(1+pp)^2dx}{r}$ minimum; quare habebimus

$$Q = \frac{(1+pp)^2}{r} \quad \text{et} \quad dQ = \frac{4pdp(1+pp)}{r} - \frac{(1+pp)^2dr}{r^2}\ .$$

Erit itaque

$$L = 0\ ,\quad M = 0\ ,\quad N = 0\ ,\quad V = \frac{4p(1+pp)}{r} \quad \text{et} \quad W = -\frac{(1+pp)^2}{r^2}\ .$$

Quocirca cum sit $ddW = dVdx$, erit $dW = Vdx + Adx$. Erit autem

$$W = -\frac{ds^4}{dx^2dp^2} = -\frac{ds^4}{ddy^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{4dyds^2}{dx^2dp} = \frac{4dyds^2}{dxddy}\ .$$

Hanc ob rem erit

$$-\frac{4ds^2dy}{ddy} + \frac{2ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx \quad \text{seu} \quad \frac{ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx$$

sive

$$(1+pp)^2dxddp = 4p(1+pp)dxdp^2 + Adp^3\ .$$

Ponatur $dx = \frac{dp}{r}$, ut sit $ddp = \frac{dpdr}{r}$, erit

$$\frac{(1+pp)^2dp^2dr}{r^2} = \frac{4p(1+pp)dp^3}{r} + Adp^3$$

seu

$$\frac{(1+pp)^2dr - 4(1+pp)rpdp}{r^2} = Adp\ ,$$

cuius integrale est

$$B - Ap = \frac{(1+pp)^2}{r} \quad \text{seu} \quad \frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^2} = dx\ .$$

Si ponatur $B = 0$, fiet

$$x = \frac{a}{1+pp} = \frac{adx^2}{ds^2} \quad \text{atque} \quad xdx^2 + xdy^2 = adx^2\ ,$$

unde erit $dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, quae est aequatio pro cycloide in A maximum radium osculi habente. At si $A = 0$, erit

$$\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dx \quad \text{seu} \quad \frac{Bpdp}{(1+pp)^2} = dy\ ;$$

erit ergo $y = \frac{a}{1+pp}$ seu $y = \frac{adx^2}{ds^2}$, unde fit $x = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, quae est pro cycloide in A cuspidem habente. Generatim vero erit

$$ds = \frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius integralis est

$$s = \frac{ap+b}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{seu} \quad sds = ady + bdx,$$

quae integrata dat

$$s^2 = 2ay + 2bx \text{ et } s = \sqrt{(2ay+2bx)}\ ,$$

quae itidem est pro cycloide ad axem oblique ductum. Ex quibus perspicitur quaestioni propositae aliam curvam non satisfacere praeter cycloidem; ita ut inter omnes curvas per puncta A et M transeuntes nulla sit nisi cyclois, quae cum sua evoluta tam exiguum spatium comprehendat.

15. Sit nunc propositum inter omnes curvas AM determinare eam, in qua $\int \frac{ddy}{ds}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = pdx$ et $dp = rdx$, erit

$$\int \frac{ddy}{ds} = \int \frac{rdx}{\sqrt{(1+pp)}}$$

ideoque

$$Q = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{et} \quad dQ = \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare erit

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad V = -\frac{rp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Cum igitur sit $ddW = dVdx$, erit $dW = Vdx + Adx$, hoc est

$$-\frac{pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{rpdx}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + Adx = -\frac{pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Adp}{r}.$$

Erit itaque $dp = 0$ et $y = \alpha x$ seu linea quaesita recta; quae terminorum destructio inde oritur, quod sit

$$\int Q dx = \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

integrabile. At si quaeratur curva, in qua $\int \frac{ddy}{yds}$ sit maximum vel minimum, fiet

$$Q = \frac{r}{y\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{et} \quad dQ = \frac{dr}{y\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rpdp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{rdy}{y^2\sqrt{(1+pp)}},$$

ita ut sit

$$L = 0, \quad M = -\frac{r}{y^2\sqrt{(1+pp)}}, \quad V = -\frac{rp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{y\sqrt{(1+pp)}}.$$

Hinc erit $ddW - dVdx + Mdx^2 = 0$; quae evoluta dat hanc aequationem

$$\frac{2dp + ppdp}{p + p^3} = \frac{2dy}{y}$$

cuius integralis est

$$y^2 = \frac{a^2p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{a^2dy^2}{dxds};$$

quae reducta dat

$$dx\sqrt{2} = \frac{dy}{y}\sqrt{(-y^2 \pm \sqrt{(y^4 + 4a^4)})},$$

cuius integratio a circuli et hyberbolae quadraturis pendet.

16. Quanquam in his exemplis posuimus quantitatem Q absolute dari, tamen regula data aeque locum habet eodemque modo potest usurpari, si Q tantum per aequationem differentialem detur, ita ut valor ipsius Q per integrationem assignari nequeat. Huiusmodi casum quidem iam tractavi, cum curvam brachystochronam in quocunque medio resistente determinarem. Eundem igitur casum ad usum regulae paragrapho 6 datae plenius ostendendum hic evolvere conveniet. Propositum ergo sit (Fig. 4) curvam AM investigare, super qua corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime descendat. Ad hoc problema solvendum ponatur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ trahaturque corpus

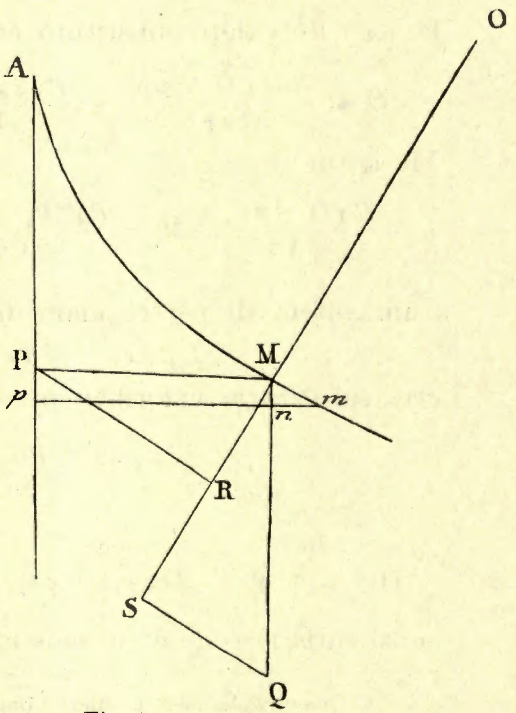


Fig. 4

in M a vi P in directione applicatae MP et ab alia vi Q in directione MQ parallela axi AP; constat enim ad has duas vires potentias quascunque reduci posse. Posito ergo $dy = pdx$ et $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ erit vis tangentialis accelerans ex iis orta

$$= \frac{Q - Pp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Qdx - Pdy}{ds},$$

vis normalis vero erit

$$= \frac{Qp + P}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Qdy + Pdx}{ds}.$$

17. Sit nunc celeritas in M debita altitudini v et resistentia aequalis sit R functioni cuicunque ipsius v. His positis erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Tempus vero, quo corpus arcum AM absolvit, erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}},$$

quod debet esse minimum. Quae formula cum superiore $\int Qdx$ comparata dat $Q = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$; ex qua erit

$$dQ = \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}},$$

et loco dv valore substituto erit

$$dQ = \frac{Rds\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{Pdy\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} - \frac{Qdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Fit igitur

$$L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}},\quad M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}},\quad N = -\frac{Q\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} \text{ atque } V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Cum autem sit per regulam datam[1]) $Ldxdy + Mdxds = dVds$ seu

$$Lpdx + Mdx\sqrt{(1+pp)} = dV\sqrt{(1+pp)},$$

erit substitutis valoribus inventis et per $\sqrt{(1+pp)}$ divisione facta

$$\frac{Rpdx + Pdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = d \cdot \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$$

$$= \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{pdv}{2v\sqrt{v}(1+pp)} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{Qpdx - Pp^2dx - Rpdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}(1+pp)}$$

substitutis loco dv et in eius expressione loco dy et ds valoribus assumtis.

1) Quae regula hic non valet. Confer praefationem. C. C.

18. Si nunc haec aequatio reducatur, prodibit sequens

$$\frac{Pdx + Qpdx}{2v\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

in qua ergo aequatione non amplius inest resistentia R. Ad indolem igitur huius aequationis investigandam duco curvae radium osculi MO, quem pono z; exprimet $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, qua corpus curvam iuxta normalem MS premit. Erit autem ob dx constans assumtum

$$z = \frac{ds^3}{dxddy} = \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp},$$

ita ut sit $\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{z}$. Hoc ergo valore substituto et per dx diviso fiet

$$\frac{1}{z} = \frac{P+Qp}{2v\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{seu} \quad \frac{2v}{z} = \frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Exprimit autem, ut modo meminimus, $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, cuius directio est normalis MS, atque, ut ante notavimus, $\frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}$ exhibet vim normalem ex resolutione potentiarum sollicitantium P et Q ortam et in directione MS curvam prementem. Quocirca in hypothesi potentiarum quarumcunque sollicitantium et resistentiae cuiuscunque ea curva est brachystochrona, quae premitur a corpore super ea moto vi duplo maiore, quam a sola vi centrifuga.

19. His igitur sufficienter expositis, quae tum ad methodum hanc inter omnes curvas eam determinandi, quae maximi minimive cuiusdam proprietate gaudeat, intelligendam, tum etiam ad eius usum in quibusque huius generis problematis declarandum necessaria visa sunt, progredior ad sequentem huius generis quaestionum classem, quae proprie sub problematis isoperimetrici nomine est nota, in qua non ex omnibus curvis intra datos terminos sitis, sed iis tantum, quae vel aeque sunt longae vel aliam quamcunque proprietatem communem habent, inveniri debet ea curva, quae maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Hocque est problema tanti in re analytica usus tantaeque dignitatis, in quo enodando acutissimi Viri BERNOULLI, TAYLORUS atque HERMANNUS ingentem collocaverunt operam; cuiusque ego etiam in dissertatione ante aliquot annos de problemate isoperimetrico[1]) solutionem satis brevem atque facilem tradidi ope formularum, quibus cuiusque generis quaestiones admodum expedite resolvi possunt.

1) Confer commentationem E 27 huius voluminis p. 13. C. C.

20. Quod hae duae proprietates, quarum altera omnium curvàrum communis esse debet, altera vero in quaesita maximum minimumve inter se commutari et altera in alterius locum collocari queant, iam satis constat; atque ego etiam pro plurimis huiusmodi proprietatibus exhibui formulas sub littera P consignatas, quae nulla facta distinctione inter binas proprietates propositas usurpari atque statim ad aequationem pro curva quaesita deduci possunt. Hic quidem eodem utar modo et per huiusmodi formulas P totum negotium absolvam; sed triplici ratione illam priorem methodum ad maiorem perfectionis gradum sum evecturus. Primum enim exponam methodum magis genuinam, cuius ope eiusmodi formulae multo facilius elici possunt. Deinde ingentem formularum ibi traditarum numerum contraham, ita ut omnes illae coniunctae in unica vel duabus contineantur. Tertio etiam eiusmodi proprietates, quae vel curvis communes vel in quaesita maximum minimumve esse debent, evolvam et ad formulas deducam, ad quas inveniendas prior mea methodus vel nimis difficulter vel omnino non sufficiebat.

21. Sit igitur $\int Q dx$ quantitas seu proprietas quae vel omnibus curvis (Fig. 5) puncta o et a iungentibus communis vel in quaesita maxima minimave esse debeat; constat eam in utroque casu in elementa $abcd$ aeque competere debere, ac in elementa $a\beta\gamma d$. Quare, si illa quantitas $\int Q dx$ ad elementa $abcd$ applicetur et tum eius valor quaeratur translatis punctis b et c in proxima β et γ, oportebit, ut differentia inter hos duos valores sit $= 0$. Differentia autem ista statim habebitur, si valor ipsius $\int Q dx$, qui respondet elementis $abcd$, ita differentietur, ut puncta tantum b et c variari ponantur; quare et hoc ipsum differentiale debebit esse $= 0$. Hoc autem differentiale huiusmodi habebit formam $A \cdot b\beta - B \cdot c\gamma = 0$, quae cum forma in priori dissertatione stabilita $P \cdot b\beta - (P + dP) \cdot c\gamma = 0$ comparata dabit $\frac{dP}{P} = \frac{B - A}{A}$, ex qua aequatione valor ipsius P respondens quantitati $\int Q dx$ invenietur. Hoc autem facto problema quodque propositum facile resol-

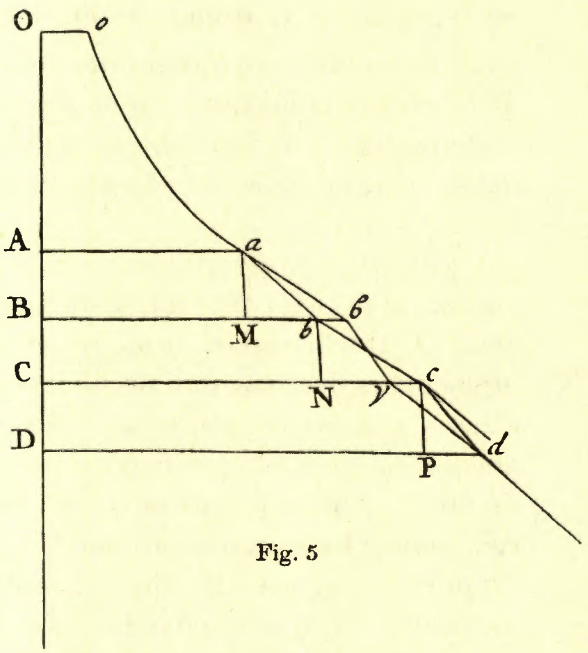


Fig. 5

vetur per hanc regulam: si inter omnes curvas, in quibus $\int S dx$ eundem habeat valorem, quaeratur ea, in qua $\int T dx$ sit maximum vel minimum, tum quaeratur valor ipsius P respondens utrique formulae $\int S dx$ et $\int T dx$ atque alter alteri per constantem quamcunque multiplicato aequalis ponatur, ac resultans aequatio exprimet naturam curvae quaesitae.

22. Quemadmodum autem, si proposita fuerit quaecunque formula $\int Q dx$, differentiam inter valores huius formulae elementis $abcd$ et $a\beta\gamma d$ inveniri oporteat, sequenti modo patebit. Positis ut ante $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$ et elemento dx constante itemque $dy = p dx$, erit $Bb = \overset{\text{I}}{y}$, $Cc = \overset{\text{II}}{y}$ et $Dd = \overset{\text{III}}{y}$, item $oab = \overset{\text{I}}{s}$, $oabc = \overset{\text{II}}{s}$, $oabcd = \overset{\text{III}}{s}$, denique $\frac{bM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{\text{I}}{p}$ et $\frac{dP}{dx} = \overset{\text{II}}{p}$. Translatis nunc punctis b et c in β et γ quantitates istae accipient sequentia incrementa, posito brevitatis gratia $q = \frac{dy}{ds}$:

$ds = 0$	$\overset{\text{I}}{ds} = q \cdot b\beta$	$\overset{\text{II}}{ds} = -dq \cdot b\beta - \overset{\text{I}}{q} \cdot c\gamma$
$dy = 0$	$\overset{\text{I}}{dy} = b\beta$	$\overset{\text{II}}{dy} = -c\gamma$
$dx = 0$	$\overset{\text{I}}{dx} = 0$	$\overset{\text{II}}{dx} = 0$
$dp = \frac{b\beta}{dx}$	$\overset{\text{I}}{dp} = -\frac{b\beta - c\gamma}{dx}$	$\overset{\text{II}}{dp} = \frac{c\gamma}{dx}$

23. Sit iam proposita formula $\int Q dx$, quae vel communis vel maxima minimave esse debeat, ideoque aequaliter expressa tam pro elementis $abcd$ quam $a\beta\gamma d$; sit autem Q functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $dy = p dx$, ita dQ habiturum sit huiusmodi formam $L ds + M dy + N dx + V dp$. Elementis autem $abcd$ respondebit iste valor $Q dx + \overset{\text{I}}{Q} dx + \overset{\text{II}}{Q} dx$, qui secundum translationem punctorum b et c in β et γ differentiatus differentialibus ipsarum $s, y, p, \overset{\text{I}}{s}, \overset{\text{I}}{y}, \overset{\text{I}}{p}, \overset{\text{II}}{s}, \overset{\text{II}}{y}, \overset{\text{II}}{p}$ sumtis, uti est praeceptum, dabit sequens differentiale.

$$dQ dx = V \cdot b\beta$$
$$\overset{\text{I}}{dQ} dx = \overset{\text{I}}{L} q dx \cdot b\beta + \overset{\text{I}}{M} dx \cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V} \cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V} \cdot c\gamma$$
$$\overset{\text{II}}{dQ} dx = -\overset{\text{II}}{L} dx dq \cdot b\beta - \overset{\text{II}}{L} \overset{\text{I}}{q} dx \cdot c\gamma - \overset{\text{II}}{M} dx \cdot c\gamma + \overset{\text{II}}{V} \cdot c\gamma ,$$

quod positum $= 0$ dat

$$(-dV + \overset{\text{I}}{L} q dx + \overset{\text{I}}{M} dx - \overset{\text{II}}{L} dx dq) b\beta = (-\overset{\text{I}}{dV} + \overset{\text{II}}{L} \overset{\text{I}}{q} dx + \overset{\text{II}}{M} dx) c\gamma .$$

Erit ergo

$$\frac{dP}{P} = \frac{-ddV + \overset{\text{I}}{L}dxdq + dxd(\overset{\text{I}}{L}q + \overset{\text{I}}{M})}{-dV + dx(\overset{\text{I}}{L}q + \overset{\text{I}}{M})}.$$

Ex qua aequatione integrata prodibit valor

$$P = e^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + dx(Lq+M)}} (-dV + dx(Lq + M))$$

denotante e numerum, cuius log. est 1.

24. Pro quaestionibus autem ad primam classem pertinentibus eidem formulae $\int Q dx$ respondere invenimus supra paragrapho 6 hunc valorem $P = -dV + dx(LQ + M)$, qui valor a nunc invento pro quaestionibus secundae classis tantum differt quantitate exponentiali. Quare, si L evanescat, quod accidit, quando Q non ab s, sed tantum ab x, y et p pendet, tum utraque formula in eandem recidit $P = -dV + Mdx$, quae ergo pro quaestionibus secundae classis aeque valet, ac pro quaestionibus primae classis. Ex praecedente autem mea dissertatione aeque ac ex ista intelligitur eandem formulam $P = -dV + Mdx$, quae respondet quantitati $\int Q dx$ existente $dQ = Mdy + Ndx + Vdp$, quoque ad quaestiones classis tertiae atque omnium sequentium sufficere; in quibus quaeri solet inter omnes curvas duas pluresve proprietates communes habentes ea curva, quae maximi minimive proprietate gaudeat; ita ut his casibus pro sequentibus classibus novos pro P valores eruere non sit opus.

25. Valor autem ipsius

$$P = e^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + (Lq+M)\,dx}} (-dV + dx(Lq + M)),$$

quem pro quantitate $\int Q dx$ [invenimus] existente Q functione quacunque ipsarum x, y, s harumque differentialibus, ita ut sit $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$, tam late patet, ut non solum 16 priores formulas omnes in praecedente mea dissertatione exhibita complectatur, sed insuper innumerabilibus aliis quaestionibus solvendis inserviat, ad quas illae formulae sunt insufficientes; quorum utrumque exemplo declarari conveniet. Propositum igitur sit (Fig. 6) inter omnes curvas AM, quae ad axem AB aequales constituunt areas AMQ, eam determinare, quae in fluido secundum

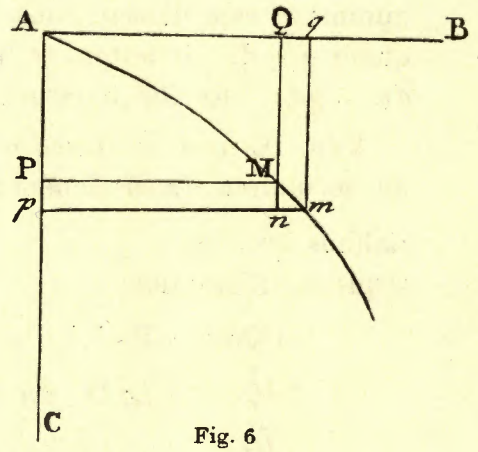


Fig. 6

axis AB directionem mota minimam patiatur resistentiam. Sumtis abscissis AP in recta AC ad axem AB normali, ponaturque $AP = x = QM$, $PM = y = AQ$ et $AM = s$, erit area $AQM = \int x dy$, quae omnibus curvis per A et M transeuntibus communis esse debet. Deinde resistentia, quam elementum Mm in fluido motum patitur, est ut Mm ductum in quadratum sinus anguli incidentiae Mmn, hoc est ut $\frac{dx^2}{ds}$, impediet ergo motum vi $\frac{dx^3}{ds^2}$, ita ut tota resistentia, quae minima esse debet, futura sit $= \int \frac{dx^3}{ds^2}$.

26. Formulae igitur, pro quibus valores ipsius P quaerere debemus, sunt $\int x dy$ et $\int \frac{dx^3}{ds^2}$. Consideremus primo hanc $\int x dy$, quae posito $dy = p dx$ abit in $\int x p dx$, haecque cum $\int Q dx$ comparata dat $Q = xp$ et $dQ = p dx + x dp$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = p$ et $V = x$, unde fiet $P = -dx$. Altera forma $\int \frac{dx^3}{ds^2}$ transit in hanc $\int \frac{dx}{1+pp}$, ita ut sit

$$Q = \frac{1}{1+pp} \quad \text{et} \quad dQ = -\frac{2pdp}{(1+pp)^2}.$$

Fiet ergo pro hac formula $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ atque $V = -\frac{p}{(1+pp)^2}$, cui respondebit consequenter

$$P = \frac{dp}{(1+pp)^2} - \frac{4p^2dp}{(1+pp)^3} = \frac{dp - 3ppdp}{(1+pp)^3}.$$

His inventis ponatur alter ipsius P valor aequalis multiplo alterius, et prodibit

$$dx = \frac{adp - 3ap^2dp}{(1+pp)^3} \quad \text{atque} \quad x = \frac{ap}{(1+pp)^2}.$$

Cum autem sit $dy = p dx$, erit

$$y = px - \int x dp = \frac{ap^2}{(1+pp)^2} - \int \frac{apdp}{(1+pp)^2} = \frac{a + 3app}{2(1+pp)^2}.$$

Curva ergo quaesita erit algebraica atque eliminata p invenietur sequens inter x et y pro curva aequatio

$$y^4 - 2y^2x^2 + x^4 = 18cx^2y + 2cy^3 - 27c^2x^2$$

mutato pro arbitrio constantis a valore.

27. Nunc ad exemplum (fig. 4) proferendum, ad quod formulae prius datae non sufficiunt, sit in hypothesi potentiarum corpus sollicitantium et resistentia quacunque inter omnes curvas AM, super quibus corpus ex A descendens in M eandem acquirit velocitatem, invenienda ea curva AM, super qua corpus ex A in M citissime perveniet. Posito ergo ut ante paragraphis 16 et 17 $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et potentia corpus secundum MP sollicitante $= P$, potentia corpus secundum MQ trahente $= Q$, celeritate in M debita altitudini v et resistentia $= R$, erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Duae igitur formulae, quae sunt propositae, erunt

$$\int dv = \int [Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}]dx \quad \text{atque} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}.$$

Pro prima igitur formula erit $Q = Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}$; ponatur $dQ = Sdy + Xdx$ et $dP = Tdy + Ydx$ (ab x enim et y tantum pendebunt Q et P) atque

$$dR = Zdv = ZQdx - ZPdy - ZRds;$$

erit itaque nostrum

$$dQ = Sdy + Xdx - Pdp - Tpdy - Ypdx - \frac{Rpdp}{\sqrt{(1+pp)}} - ZQdx\sqrt{(1+pp)} + ZPdy\sqrt{(1+pp)} + ZRds\sqrt{(1+pp)}.$$

Hanc ob rem fiet

$$L = ZR\sqrt{(1+pp)}, \quad M = S - Tp + ZP\sqrt{(1+pp)} \cdot V = -P - \frac{Rp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ex his ob $q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ atque $dq = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ sequens eruetur valor ipsius P

$$P = e^{\int \frac{ZRdxdp}{(S+Y)dx(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}}} \left((S+Y)dx(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}\right).$$

Altera vero formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ modo ut supra tractata dabit

$$L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}, \quad M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$$

atque

$$dV = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{pdv}{2v\sqrt{v(1+pp)}}$$

adeo, ut fiat

$$P = e^{\int \frac{R\,dx\,dp}{(P\,dx + Q\,dy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2v\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}}} \left((P\,dx + Q\,dy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2v\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} \right) .$$

Duorum horum valorum ipsius P multipla quaecunque sibi aequalia posita dabunt aequationem pro curva quaesita, quam autem ulterius persequi calculi prolixitas non permittit.

28. Sit nunc formula (Fig. 1), quae vel omnibus curvis communis esse debet vel in quaesita curva maximum minimumve, haec $\int Q\,dx \int R\,dx$; fit autem

$$dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp \quad \text{et} \quad dR = E\,ds + F\,dy + G\,dx + I\,dp .$$

Dabit ergo haec formula pro elementis $abcd$ hanc expressionem

$$Q\,dx \int R\,dx + \overset{\text{I}}{Q}\,dx \int \overset{\text{I}}{R}\,dx + \overset{\text{II}}{Q}\,dx \int \overset{\text{II}}{R}\,dx .$$

Huius differentiale secundum data praecepta dabit, ut sequitur:

$$d \cdot Q\,dx \int R\,dx = V \cdot b\beta \int R\,dx$$

$$d \cdot \overset{\text{I}}{Q}\,dx \int \overset{\text{I}}{R}\,dx = \overset{\text{I}}{L} q\,dx \cdot b\beta \int \overset{\text{I}}{R}\,dx + \overset{\text{I}}{M}\,dx\,b\beta \int \overset{\text{I}}{R}\,dx - \overset{\text{I}}{V}(b\beta + c\gamma) \int \overset{\text{I}}{R}\,dx + \overset{\text{I}}{Q} I\,dx \cdot b\beta$$

$$d \cdot \overset{\text{II}}{Q}\,dx \int \overset{\text{II}}{R}\,dx = -\overset{\text{II}}{L}\,dx\,dq \cdot b\beta \int \overset{\text{II}}{R}\,dx - \overset{\text{II}\,\text{I}}{L} q\,dx \cdot c\gamma \int \overset{\text{II}}{R}\,dx - \overset{\text{II}}{M}\,dx \cdot c\gamma \int \overset{\text{II}}{R}\,dx$$
$$+ \overset{\text{II}}{V} \cdot c\gamma \int \overset{\text{II}}{R}\,dx + \overset{\text{II}}{Q} I\,dx \cdot b\beta + \overset{\text{II}}{Q}(\overset{\text{I}}{E} q + \overset{\text{I}}{F})\,dx^2 \cdot b\beta - \overset{\text{II}\,\text{I}}{Q} I\,dx(b\beta + c\gamma) .$$

Haec differentialia si ponantur $= 0$, prodibit

$$b\beta(-d \cdot V \int R\,dx + (\overset{\text{I}}{L} q + \overset{\text{I}}{M})\,dx \int \overset{\text{I}}{R}\,dx - \overset{\text{II}}{L}\,dx\,dq \int \overset{\text{II}}{R}\,dx + \overset{\text{II}}{Q} I\,dx$$
$$+ \overset{\text{II}}{Q}(E q + F)\,dx^2 - d \cdot \overset{\text{I}}{Q} I\,dx) = c\gamma(-d \cdot \overset{\text{I}}{V} \int \overset{\text{I}}{R}\,dx + (\overset{\text{II}\,\text{I}}{L} q + \overset{\text{II}}{M})\,dx \int \overset{\text{II}}{R}\,dx + \overset{\text{II}\,\text{I}}{Q} I\,dx) .$$

Ex hac aequatione orietur

$$\frac{dP}{P} = \frac{-dd \cdot V \int R\,dx + dx\,d(\overset{\text{I}}{L} q + \overset{\text{I}}{M}) \int \overset{\text{I}}{R}\,dx - \overset{\text{II}}{Q}(E q + F)\,dx^2 + \overset{\text{II}}{L}\,dx\,dq \int \overset{\text{II}}{R}\,dx + \overset{\text{II}}{Q}\,dI\,dx + d \cdot \overset{\text{I}}{Q} I\,dx}{-d \cdot V \int R\,dx + (\overset{\text{I}}{L} q + \overset{\text{I}}{M})\,dx \int \overset{\text{I}}{R}\,dx + \overset{\text{II}}{Q} I\,dx - \overset{\text{II}}{L}\,dx\,dq \int \overset{\text{II}}{R}\,dx - d \cdot \overset{\text{I}}{Q} I\,dx} .$$

Hincque erit

$$P = e^{\int \frac{Q\,dI\,dx + L\,dx\,dq \int R\,dx - Q(E q + F)\,dx^2}{-d \cdot V \int R\,dx + (L q + M)\,dx \int R\,dx + Q I\,dx}} (-d \cdot V \int R\,dx + (L q + M)\,dx \int R\,dx + Q I\,dx) ;$$

qui ergo valor ipsius P respondet quantitati $\int Q dx \int R dx$, quae non solum omnes formulas 24 ante a me prolatas comprehendit, sed etiam longe latius patet.

29. Ex his intelligitur methodo exposita etiam alias formulas $\int Q dx$, in quibus Q non solum per x, y, s et p, sed praeterea a quibuscunque integrationibus, quin etiam a constructione aequationum quarumcunque differentialium pendet, ad valorem ipsius P inveniendum reduci posse. Tantum autem peculiari modo est opus, si in Q differentialia secundi altiorumve graduum contineantur, pro quibus casibus plura quam tria elementa considerari debent. Contineat igitur (Fig. 7) Q in $\int Q dx$ praeter x, y et s, eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus in se, ita ut posito $dy = p dx$ et $dp = r dx$ futurum sit

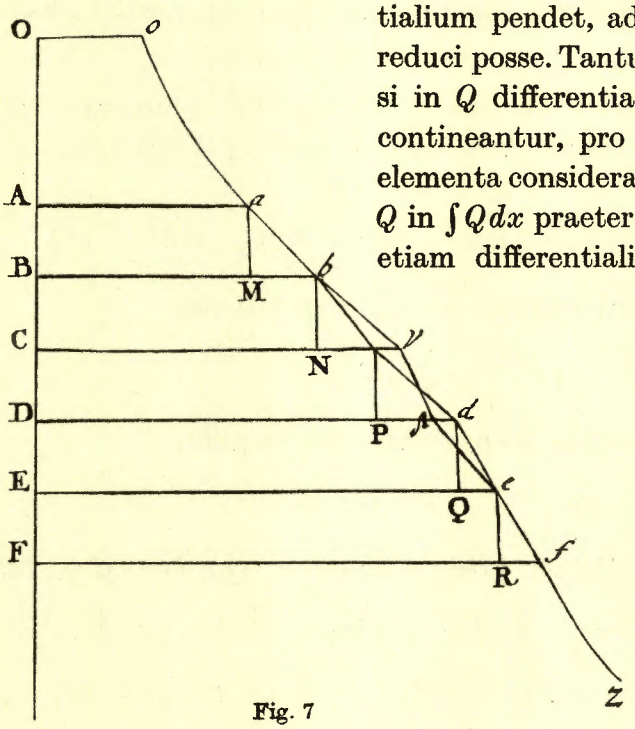


Fig. 7

$$dQ = L ds + M dy + N dx + V dp + W dr .$$

Ex qua expressione ut valor ipsius P eruatur, necesse est quinque elementa $abcdef$ considerare, quorum quidem duo duntaxat puncta c et d in loca proxima γ et δ transferantur. Hac igitur translatione per differentiationem repraesentata fiet

$ds = 0$	$d^{\mathrm{I}}s = 0$	$d^{\mathrm{II}}s = q \cdot c\gamma$	$d^{\mathrm{III}}s = -dq \cdot c\gamma - \overset{\mathrm{I}}{q} \cdot d\delta$
$dy = 0$	$d^{\mathrm{I}}y = 0$	$d^{\mathrm{II}}y = c\gamma$	$d^{\mathrm{III}}y = -d\delta$
$dx = 0$	$d^{\mathrm{I}}x = 0$	$d^{\mathrm{II}}x = 0$	$d^{\mathrm{III}}x = 0$
$dp = 0$	$d^{\mathrm{I}}p = \frac{c\gamma}{dx}$	$d^{\mathrm{II}}p = -\frac{c\gamma - d\delta}{dx}$	$d^{\mathrm{II}}p = \frac{d\delta}{dx}$
$dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$	$d^{\mathrm{I}}r = -\frac{2c\gamma - d\delta}{dx^2}$	$d^{\mathrm{II}}r = \frac{c\gamma + 2d\delta}{dx^2}$	$d^{\mathrm{III}}r = -\frac{d\delta}{dx^2}$.

$$d^{\mathrm{IV}}s = -dq \cdot c\gamma + d\overset{\mathrm{I}}{q} \cdot d\delta ,$$

reliqua evanescunt. Quocirca si valor elementis $abcdef$ respondens differentietur et loco differentialium valores assignati

substituantur, prodibit differentia inter illum valorem et eundem elementis $ab\gamma\delta ef$ respondentem.

30. Quo igitur hanc differentiam pro valore, qui ex $\int Q dx$ oritur et elementis $abcdef$ respondet, inveniamus, differentiare oportet hanc formulam

$$Q dx + \overset{\text{I}}{Q} dx + \overset{\text{II}}{Q} dx + \overset{\text{III}}{Q} dx + \overset{\text{IV}}{Q} dx$$

secundum regulam datam prodibitque

$$dQ dx = \frac{W \cdot c\gamma}{dx}$$

$$d\overset{\text{I}}{Q} dx = \overset{\text{I}}{V} \cdot c\gamma - \frac{2\overset{\text{I}}{W} \cdot c\gamma}{dx} - \frac{\overset{\text{I}}{W} \cdot d\delta}{dx}$$

$$d\overset{\text{II}}{Q} dx = \overset{\text{II}}{L} q dx \cdot c\gamma + \overset{\text{II}}{M} dx \cdot c\gamma - \overset{\text{II}}{V} \cdot c\gamma - \overset{\text{II}}{V} \cdot d\delta + \frac{\overset{\text{II}}{W} \cdot c\gamma}{dx} + \frac{2\overset{\text{II}}{W} \cdot d\delta}{dx}$$

$$d\overset{\text{III}}{Q} dx = -\overset{\text{III}}{L} dx dq \cdot c\gamma - \overset{\text{III I}}{L} q dx \cdot d\delta - \overset{\text{III}}{M} dx \cdot d\delta + \overset{\text{III}}{V} \cdot d\delta - \frac{\overset{\text{III}}{W} \cdot d\delta}{dx}$$

$$d\overset{\text{IV}}{Q} dx = -\overset{\text{IV}}{L} \cdot dx dq \cdot c\gamma + \overset{\text{IV}}{L} dx dq \cdot d\delta \,.$$

Haec differentia nihilo aequalis posita dabit

$$c\gamma\left(\frac{ddW}{dx} - d\overset{\text{I}}{V} + (\overset{\text{II}}{L} q + \overset{\text{II}}{M}) dx - (\overset{\text{III}}{L} + \overset{\text{IV}}{L}) dx dq\right)$$
$$= d\delta\left(\frac{dd\overset{\text{I}}{W}}{dx} - d\overset{\text{II}}{V} + (\overset{\text{III I}}{L} q + \overset{\text{III}}{M}) dx - \overset{\text{IV}}{L} dx dq^{\text{I}}\right),$$

quae aequatio comparata cum canonica $P \cdot c\gamma = (P + dP) d\delta$ dat

$$\frac{dP}{P} = \frac{d^3W - dd\overset{\text{I}}{V} dx + dx^2 \cdot d(\overset{\text{II}}{L} q + \overset{\text{I}}{M}) - dx^2 d \cdot \overset{\text{III}}{L} dq + \overset{\text{IV}}{L} dx^2 dq}{ddW - dx d\overset{\text{I}}{V} + dx^2 (\overset{\text{II}}{L} q + \overset{\text{II}}{M}) - (\overset{\text{III}}{L} + \overset{\text{IV}}{L}) dx^2 dq}.$$

Hinc ergo integrando prodibit sequens valor ipsius P

$$= e^{\int \frac{L dx^2 dq}{ddW - dV dx + dx^2 (Lq + M)}} [ddW - dV dx + dx^2 (Lq + M)]$$

posito ut hactenus $q = \frac{dy}{ds}$.

31. Perspicuum igitur est hunc valorem ipsius P facto $L = 0$ fore

$$ddW - dVdx + Mdx^2$$

ideoque non diversum ab eo, quem pro prima classe eiusdem formulae $\int Q dx$ respondentem invenimus paragrapho 13. Atque generalius etiam valet pro omnibus sequentibus classibus, si in $\int Q dx$, Q pendeat quomodocunque ab x, y eorumque differentialibus tam primi gradus quam secundi, non vero ab s perpetuo ipsi eandem formulam $P = ddW - dVdx + Mdx^2$ respondere ex hacque omnes omnino quaestiones posse resolvi. Similiter etiam colligere licet, si Q praeter x, y et eorum differentialia tum primi tum secundi gradus quoque differentialia tertii et altiorum graduum involvat, eundem valorem pro P inventum omnibus classibus inservire. Scilicet si ponatur

$$dy = pdx\ ,\quad dp = rdx\ ,\quad dr = tdx\ ,\quad dt = udx \quad \text{etc.}$$

fueritque

$$dQ = Ndx + Mdy + Vdp + Wdr + Xdt + Ydu \quad \text{etc.}\ ,$$

tum ipsi $\int Q dx$ respondebit sequens valor ipsius P

$$= M - \frac{dV}{dx} + \frac{ddW}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{d^4Y}{dx^4} - \text{etc.}\ ,$$

qui ipsius P valor locum habet in omnibus classibus.

32. Ad usum huius formulae monstrandum quaerenda sit inter omnes omnino curvas ea, in qua $\int \frac{d^3y}{dxdy}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = pdx$, $dp = rdx$, $dr = tdx$, quibus substitutis debebit ista formula $\int \frac{tdx}{p}$ esse maximum vel minimum. Fiet igitur $Q = \frac{t}{p}$ atque $dQ = -\frac{tdp}{p^2} + \frac{dt}{p}$, quare erit

$$N = 0\ ,\quad M = 0\ ,\quad V = -\frac{t}{p^2}\ ,\quad W = 0\ ,\quad X = \frac{1}{p}\ ,\quad Y \text{ etc.} = 0\ .$$

Hinc prodit valor ipsius $P = -\frac{dV}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}$, qui posito aequalis nihilo et integratus dat $Vdx^2 + ddX = Adx^2$. Substitutis autem loco V et X valoribus inventis prodibit

$$-\frac{tdx^2}{p^2} - \frac{ddp}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = Adx^2\ .$$

Est autem $t = \frac{dr}{dx} = \frac{ddp}{dx^2}$, unde erit $-\frac{2ddp}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = Adx^2$. Cum porro sit $dx = \frac{dp}{r}$ atque $ddx = 0$, erit $ddp = \frac{dpdr}{r}$, quibus surrogatis habebitur $-\frac{2dr}{rp^2} + \frac{2dp}{p^3} = \frac{Adp}{r^2}$; quae transit in hanc $\frac{-2prdr + 2r^2dp}{p^3} = Adp$, cuius integralis est $B - \frac{r^2}{p^2} = Ap$. Hinc fiet

$$r = \frac{dp}{dx} = \sqrt{(Bp^2 - Ap^3)} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{dp}{\sqrt{(Bp^2 - Ap^3)}}.$$

Posito nunc $B = 0$ et mutata constante erit $dx = -\frac{adp}{2p\sqrt{p}}$ seu $x = \frac{a}{\sqrt{p}}$, atque $p = \frac{a^2}{x^2} = \frac{dy}{dx}$, ex qua fit $y = b - \frac{a^2}{x}$, quae est pro hyperbola intra asymtotos. Posito vero $A = 0$ fit $x = alp$ et $\frac{dy}{dx} = p = e^{\frac{x}{a}}$. Unde oritur $y = ae^{\frac{x}{a}}$ et $x = al\frac{y}{a}$, quae est pro curva logarithmica.

33. In formula autem generali $\int Qdx$ si in Q ingrediatur vel arcus s vel alia quantitas integralis ut $\int Rdx$, tum valor ipsius P magis erit compositus pro quaestionibus secundae quam primae classis, accedente scilicet quantitate exponentiali. Pro sequentibus autem classibus valor ipsius P nequidem exhiberi potest, sed tum in solutione problematum, in quibus huiusmodi formulae occurrunt, ad modum confugiendum est, quem in praecedente dissertatione exposui. Interim tamen haec regula semper potest magna cum utilitate adhiberi. Si Q pendeat ab s ita, ut in eius differentiali insit terminus Lds, et in quaestionibus secundae sequentiumve classium una conditio sit, ut omnes curvae sint aeque longae, i. e. si $\int ds$ fuerit una proprietatum, quae vel omnibus curvis communis vel in quaesita maximum minimumve esse debeat, tum tuto usurpari poterit valor ipsius P ad primam classem pertinens. Simili modo etiam, si in $\int Qdx$ pendeat Q ab alia quantitate integrali ut $\int Rdx$, tum quoque valor ipsius P ad primam classem pertinens potest usurpari, siquidem $\int Rdx$ etiam inter proprietates, quae omnibus curvis communes esse debent, reperiatur. Hoc itaque artificio quaestiones alias difficillimae solutu admodum faciles redduntur.

34. Quod autem, si Q in $\int Qdx$ contineat in se vel arcum s vel aliam quantitatem integralem, tum valor ipsius P pro classe secunda magis fiat compositus, quam pro prima, atque in sequentibus classibus plane non ex-

hiberi queat, nisi vel s vel aliae omnes quantitates integrales, quae in Q continentur, simul inter quantitates propositas reperiantur, quae omnibus iis curvis communes esse debent, ex quibus quaesita debet determinari, eius difficultatis ratio in hoc consistit, quod translato b in β (Fig. 1) haec mutatio non tantum expressionem ad elementa abc pertinentem afficiat et immutet, sed insuper ipsius $\int Q dx$ valorem, qui omnibus sequentibus elementis post c competit, afficiat atque immutet; quemadmodum, si re ipsa ad sequentia elementa hunc ipsius $\int Q dx$ valorem applicemus, statim elucebit. Sed si Q in $\int Q dx$ tantum ab x et y horumque differentialibus cuiusque ordinis pendeat, tum hoc incommodum locum non habet, sed quomodocunque punctum b varietur, tamen haec variatio in sequentia post c elementa nullum omnino habet influxum, uti ex allatis facile intelligitur.

35. Si inter omnes curvas (Fig. 8) puncta o et z iungentes ea debeat determinari, in qua formula [$\int Q dx$, ubi] Q neque ab s neque alia quantitate integrali pendeat, debeat esse maximum vel minimum, tum curva oz utique hanc habebit proprietatem, si eius quaevis portio oa eadem praerogativa gaudeat. At si Q pendeat vel ab s vel ab alia quantitate integrali, tum curva oz habere poterit $\int Q dx$ maximum vel minimum, etiamsi eius nulla portio hac praerogativa gaudeat, cum translato b in β tota curvae portio cz alium induat valorem ex $\int Q dx$, qui valor forte maior vel minor esse potest, etiamsi valor elementis abc competens non sit maximus vel minimus. Quamobrem si quaeratur inter omnes curvas puncta definita o et z iungentes ea, in qua $\int Q dx$ involvente Q vel s vel aliam quantitatem integralem, debeat esse maximum minimumve, tum positio elementorum abc non ex eo debet determinari, quo valor $\int Q dx$ ad ea applicatus fiat maximus minimusve, sed potius illa positio est quaerenda, quae pro omnibus sequentibus elementis $cdefg$ etc. atque adeo pro tota portione az generet maximum minimumve valorem ipsius $\int Q dx$.

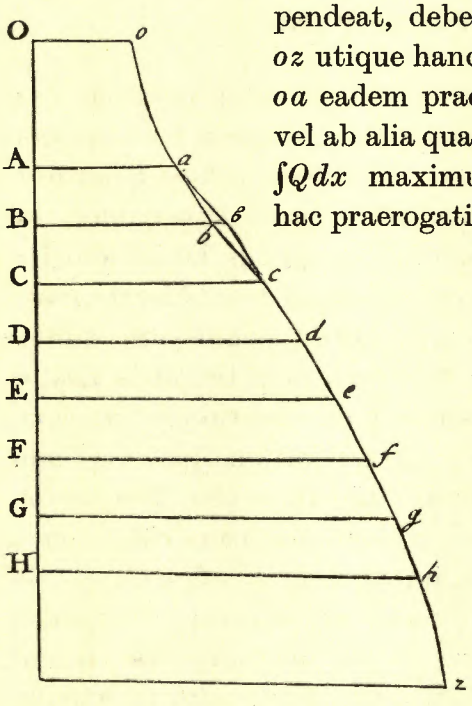


Fig. 8

36. Haec autem determinatio positionis elementorum abc sequenti modo debet institui. Translato b in β effici debet, ut eadem quantitas $\int Q dx$

tam in curvam $abc\ldots z$ quam in $a\beta c\ldots z$ redundet. Posito autem Q ab s pendere, ut sit

$$dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$$

posito $dy = pdx$, erit differentia inter valores curvae $abc\ldots z$ et curvae $a\beta c\ldots z$ respondentes, quae aequalis esse debet 0, sequens $\left(\text{posito } q = \frac{dy}{ds}\right)$

$$V\cdot b\beta + \overset{\text{I}}{L}qdx\cdot b\beta$$
$$+ \overset{\text{I}}{M}dx\cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V}\cdot b\beta - \overset{\text{II}}{L}dxdq\cdot b\beta - \overset{\text{III}}{L}dxdq\cdot b\beta - \overset{\text{IV}}{L}dxdq\cdot b\beta \text{ etc.},$$

donec ad punctum z erit perventum. Abscissae autem OC respondet valor $\overset{\text{II}}{L}$; quare, si punctum z in c incideret, haberetur praeter terminos

$$V\cdot b\beta + \overset{\text{I}}{L}qdx\cdot b\beta + \overset{\text{I}}{M}dx\cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V}\cdot b\beta$$

tantum $-\overset{\text{II}}{L}dxdq\cdot b\beta$. Sin autem in d incideret, haberetur

$$-dxdq\cdot b\beta(\overset{\text{II}}{L} + \overset{\text{III}}{L})$$

et responderet abscissae $AC + dx$. Sumto autem in ipso puncto z et posito abscissae intervallo $CZ = ndx$ erit terminus adiiciendus et respondens abscissae $OZ = OC + ndx$ iste

$$-dxdq\cdot b\beta(\overset{\text{II}}{L} + \overset{\text{III}}{L} + \overset{\text{IV}}{L} + \cdots + \overset{n+\text{II}}{L}).$$

At cum sit n numerus infinitus, erit iste terminus

$$= -dxdq\cdot b\beta\left(n\overset{\text{II}}{L} + \frac{n^2 d\overset{\text{II}}{L}}{1\cdot 2} + \frac{n^3 dd\overset{\text{II}}{L}}{1.2.3} + \frac{n^4 d^3\overset{\text{II}}{L}}{1.2.3.4} \text{ etc.}\right).$$

37. Cum autem distantia OZ sit data ideoque constans, ponatur ea $= a$, erit $x + ndx = a$ hincque $n = \frac{a-x}{dx}$. Quo substituto erit terminus iste ab

$$V\cdot b\beta + \overset{\text{I}}{L}\cdot qdx\cdot b\beta + \overset{\text{I}}{M}dx\cdot b\beta - \overset{\text{I}}{V}\cdot b\beta$$

auferendus sequens:

$$dq\cdot b\beta\left((a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1\cdot 2\,dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2} \text{ etc.}\right).$$

At $\int L dx$, si post integrationem ponatur a loco x, abit in hanc expressionem:

$$\int L dx + (a - x) L + \frac{(a-x)^2 dL}{1 \cdot 2 dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1.2.3.dx^2} + \text{etc.} ,$$

quae expressio, cum sit constans, ponatur $= A$; erit ergo

$$A - \int L dx = (a - x) L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2.dx} + \text{etc.} ,$$

quare quantitas subtrahenda illa erit haec

$$dq \cdot b\beta(A - \int L dx) .$$

Hanc ob rem habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$- dV + dx(Lq + M) = Adq - dq \int L dx .$$

Atque valor ipsius P tam pro quaestionibus primae classis quam sequentium erit semper idem, scilicet

$$P = - dV + dx(Lq + M) + dq \int L dx ,$$

ubi $\int L dx$ ita ponitur esse integratum, ut evanescat sumto puncto indefinito a in puncto fixo z seu posito $x = a$. Simili quoque modo erit progrediendum, si Q ab alia quantitate integrali pendeat.

LEONHARDI EULERI
ANIMADVERSIO AD LIBRI PRAECEDENTIS PARAGRAPHUM 83 ET SEQUENTES DE CURVIS ELASTICIS[1])

Commentatio 84 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta eruditorum 1746, p. 92—95

Cum Vir Celeberrimus DANIEL BERNOULLI (qui hoc argumentum de oscillationibus laminae elasticae diligentissime est perscrutatus suasque meditationes iam ante complures annos cum Academia Scientiarum Petropolitana communicavit, in cuius Commentariis eae mox comparebunt[2]), hanc meam tractationem iam ante impressionem evolvisset, in isto loco errorem deprehendit meque de eo benevole est hortatus. Cum autem exemplar meum manuscriptum non amplius esset in mea potestate, eum corrigere non licuit; quamobrem hanc occasionem arripio illum emendandi.

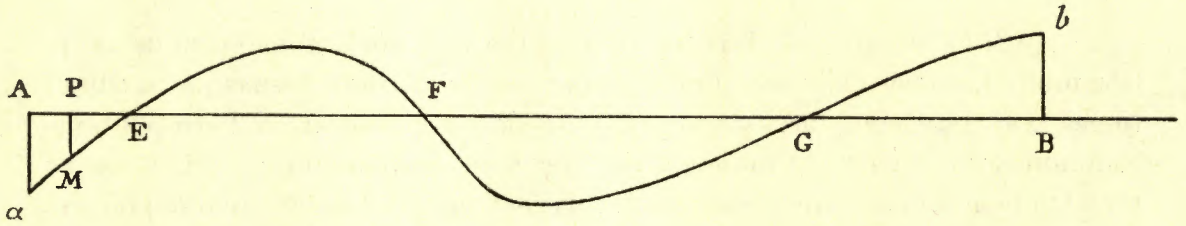
Quanquam scilicet investiganti mihi omnes modos, quibus lamina elastica libera seu nusquam fixa sese ad motum oscillatorium componere potest, calculus innumerabiles modos suppeditavit, prouti lamina inter oscillandum axem seu rectam directricem, qua status laminae quietis repraesentatur, vel in uno vel duobus vel tribus pluribusve punctis intersecat, tamen horum modorum semissem tantum, scilicet eos, in quibus intersectionum numerus esset par, ad institutum aptos esse putavi. Causa, quae me in hac opinione confirmare videbatur, haec erat, quod pro intersectionum numero impari summam omnium momentorum virium sollicitantium non evanescere arbitratus essem, cum ea pro numero pari evidenter evanescat. Ut enim motus oscillatorius laminae liberae subsistere possit, non solum requiritur, ut omnes vires, quibus lamina inter oscillandum sollicitari concipitur, se mutuo destruant, quod quidem pro omni intersectionum numero aeque usu venit, sed etiam necesse est, ut quoque earum virium momenta se mutuo destruant. Nisi enim

1) Confer *Methodum inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* p. 286 seq. *LEONHARDI EULERI* Opera omnia series I vol. 24. C. C.

2) DANIEL BERNOULLI: *De vibrationibus et sono laminarum elasticarum.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 13 (1741/3), 1751, p. 105—120.

hoc fieret, lamina circa suum centrum gravitatis motum gyratorium impetraret, quo motus oscillatorius perturbaretur et tolleretur.

At vero perpetuo, sive intersectionum numerus sit par sive impar, summa omnium momentorum pro tota lamina aeque evanescit ac summa ipsarum virium. Repraesentet enim $aEFGb$ figuram laminae, quam inter oscillandum induit, existente AB eius situ naturali, in singulis punctis M ipsi applicatae concipi debent vires secundum perpendicula MP ad axem urgentes, quae sint his ipsis distantiis MP proportionales. Positis ergo abscissa $AP = x$ et applicata $PM = y$, quae ubique minima consideratur, ita ut elementa curvae aM ab elementis abscissae AP non discrepent, erit vis in M applicata ut y et summa omnium virium $= \int y dx$. Erat vero ex aequatione pro curva



$\int y dx = \frac{c^4 d^3 y}{dx^3}$, atque curva ita comparata esse debere ostensa est, ut in extremitate b formula $\frac{d^3 y}{dx^3}$ evanescat. Posita enim tota longitudine $AB = a$, aequatio pro curva inventa $y dx^4 = c^4 d^4 y$ ita quater integrari debebat, ut primo posito $x = 0$ fieret $y = Aa = b$, secundo ut posito $x = 0$ fieret $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, tertio ut posito $x = 0$ fieret quoque $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, quarto ut posito $x = a$ fieret $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ et quinto ut posito $x = a$ fieret $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$. Ex aequatione autem differentiali est

$$\int y dx = \frac{c^4 d^3 y}{dx^3} \quad \text{et} \quad \int dx \int y dx = \frac{c^4 ddy}{dx^2};$$

unde apparet summam omnium virium $y dx$ pro tota curva evanescere. Quod iam ad summam omnium momentorum attinet, quoniam vis y in M applicatae momentum est $= xy$, erit summa omnium momentorum $= \int xy dx$, quam pro tota curva non nisi iis casibus, quibus intersectionum numerus E, F, G etc. esset par, evanescere opinatus eram. Hac de re autem monitus perspexi quoque hanc expressionem $\int xy dx$ pro tota curva evanescere debere. Est namque $\int xy dx = x \int y dx - \int dx \int y dx$ et, quoniam pro tota laminae extensione tam $\int y dx$ quam $\int dx \int y dx$ evanescunt, perspicuum est quoque

summam momentorum $\int xy\,dx$ in nihilum abire. Hoc ergo animadverso omnes oscillationum modi his aequationibus contenti:

$$\text{I.}\quad \frac{a}{c} = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi = l \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{II.}\quad \frac{a}{c} = \tfrac{3}{2}\pi + \varphi = l \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{III.}\quad \frac{a}{c} = \tfrac{5}{2}\pi - \varphi = l \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{IV.}\quad \frac{a}{c} = \tfrac{7}{2}\pi + \varphi = l \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

etc.

ad oscillationes perficiendas aeque sunt apti, etiamsi ordine tantum pares ad hoc idoneos iudicavissem. Prima igitur aequatio dat $\varphi = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$ ac propterea $\frac{a}{c} = 0$, unde nullus motus oscillatorius resultat. Secundus modus duas habet intersectiones fitque

$$\varphi = 1^\circ 0' \cdot 39'' \frac{7576}{10000} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} = 4{,}7300350232\ .$$

Tertius modus inservit pro tribus intersectionibus estque, cum angulus φ fiat valde parvus, proxime

$$\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - 2e^{-\frac{5}{2}\pi} - 4e^{-5\pi}$$

denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Quartus modus praebet quatuor intersectiones et, quia φ est angulus multo minor quam ante, erit adhuc propius

$$\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi + 2e^{-\frac{7}{2}\pi} - 4e^{-7\pi}$$

atque ita porro.

His igitur monitis in paragrapho 96 perfectus consensus inter oscillationum modos laminae utroque termino parieti infixae et laminae liberae deprehendetur neque exceptiones casuum hoc loco factae locum habent. Dum igitur lamina utrinque fixa ita oscillatur, ut inter oscillandum axem vel nusquam vel semel vel bis vel ter etc. intersecet, tum eius motus oscillatorius idem erit, ac si eadem lamina libera ita oscillaretur, ut axem vel in duobus vel tribus vel quatuor vel quinque punctis etc. intersecaret.

SOLUTIO PROBLEMATIS CUIUSDAM A CELEBERRIMO DANIELE BERNOULLIO PROPOSITI

Commentatio 99 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1738), 1747, p. 164—180

1. In postremis litteris, quas Celeberrimus DANIEL BERNOULLI ad me dedit Basilea die 24. Maii huius anni [scil. 1738], mentionem fecit alicuius problematis, in quod occasione alicuius problematis mechanici incidisset. Quaerebat autem inter omnes curvas isoperimetricas iisdem terminis contentas eam, in qua $\int r^m ds$ haberet maximum minimumve valorem, denotantibus s arcum curvae, r vero eius radium osculi. Nunciat vero Vir Celeberrimus simul se duplicem solutionem esse nactum, ad quarum alteram ponendo elementum arcus ds, ad alteram autem ponendo elementum abscissae dx constans pervenisset; at ambas hasce solutiones ita esse comparatas, ut inter se non conspirare videantur. Casu quidem, quo $m = 1$, hanc mihi perscripsit aequationem a se inventam

$$ds = \frac{2r\,dr}{\sqrt{(g + 4nr - 4rr)}},$$

qua curvae natura exprimatur. Sin autem inter omnes omnino curvas quaereretur ea, in qua esset $\int r\,ds$ minimum, se invenisse scribit, fore $r = 0$, cum tamen ego iam ante Ipsi scripsissem cycloidem huic quaestioni satisfacere eamque solam. Hanc ob rem me rogavit, ut problema hoc pariter aggrederer solutionemque, quam fuero consecutus, secum communicarem.

2. Ac primo quidem intuitu istud problema in amplissimo problemate isoperimetrico, cuius plures solutiones a Viris acutissimis BERNOULLIIS, HERMANNO ac TAYLORO sunt traditae, contineri videtur. Sed qui ipsam huius problematis solutionem aggredietur, ex methodis istis, quas nominati Viri reliquerunt, vix quicquam utilitatis assequetur; cuius rei ratio est, quod in formula $\int r^m ds$, quae minima esse debet, differentialia secundi gradus insint ob radium osculi r, memoratae vero methodi ad alias formulas non sint accommodatae,

nisi quae ex differentialibus primi gradus respectu coordinatarum orthogonalium consistant; omnem enim formulam, quae maxima minimave esse debet, ante ad huiusmodi coordinatas orthogonales reduci oportet, quam resolutio suscipiatur. Mihi vero solutio huius problematis statim non difficilis est visa, cum ante biennium circiter novam atque peculiarem methodum essem adeptus omnia huius generis problemata resolvendi, quae ad differentialia primi generis non erat adstricta, sed ad cuiuscunque gradus differentialia patebat. Quam methodum meam etiamsi iam protulerim, tamen non incongruum visum est eam ad problema hoc a Celeberrimo BERNOULLIO propositum accommodare eiusque beneficio solutionem desideratam eruere, cum, ut Viri Clarissimi desiderato satisfacerem, tum etiam, ut methodi meae vis et praestantia evidentius perspiciatur.

3. Problema autem propositum in duas partes distribui conveniet, in quarum priore inter omnes omnino curvas iisdem terminis contentas eam investigabo, in qua $\int r^m ds$ minimum omnium obtineat valorem: quae quaestio, etiamsi a Celeberrimo BERNOULLIO non videatur esse proposita, tamen praecipue hic tractari meretur. Nam, quae curva inter omnes prorsus curvas iisdem terminis contentas desiderata maximi minimive proprietate gaudet, eadem etiam hac praedita erit proprietate inter omnes curvas aequelongas. In altera autem problematis parte infinitas curvas intra eosdem terminos sitas contemplabor, quae omnes inter se longitudine sint aequales, atque ex his solum curvis eam determinabo, in qua $\int r^m ds$ minimum valorem sit habiturum, quae quidem quaestio cum proposita penitus congruit. In priore igitur problemate inter datos terminos absolute ea curva investigatur, in qua sit $\int r^m ds$ minimum, in posteriore vero inter eosdem terminos curva datae longitudinis desideratur, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis et iisdem terminis contentas hac gaudeat praerogativa, ut $\int r^m ds$ minimam obtineat quantitatem. Ex quo perspicuum est priori quaestioni unicam satisfacere posse curvam, posteriori vero innumerabiles, pro infinita longitudinis varietate, quae curvae quaesitae praescribi potest.

4. Fundamentum, quo utriusque problematis solutio nititur, ex methodo mea iam exposita huc redit: Si positis abscissa $= x$, applicata $= y$, inter omnes curvas iisdem terminis comprehensas ea requiratur, in qua formula quaecunque integralis maximum minimumve induere debeat valorem, tum, cuiuscunque gradus differentialia in ea formula integrali insint, dummodo integralia non implicantur, ponatur

$$dy = pdx\,, \quad dp = qdx\,, \quad dq = rdx\,, \quad dr = sdx \quad \text{etc.}$$

Quo facto formula illa integralis ad eiusmodi formam reducetur $\int Z dx$, in qua Z erit functio quantitatum x, y, p, q, r, s etc. Deinde quantitas Z differentietur sitque

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{etc.}$$

Hinc formetur valor quidam V sumendo

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}$$

posito dx constante. Hoc denique pacto pro formula integrali proposita invento eiusmodi valore V ponatur $V = 0$ haecque aequatio praebebit naturam curvae quaesitae. At si non inter omnes omnino curvas, sed inter eas tantum, in quibus una pluresve formulae integrales aequalem obtinent valorem, ea desideretur, in qua alia quaepiam formula integralis maximum minimumve habitura sit valorem, tum singulae formulae integrales praescripto modo tractentur atque uniuscuiusque valor respondens V eruatur, hocque facto singuli isti valores V per quantitates constantes quascunque multiplicati coniungantur nihiloque aequales ponantur, ex qua aequatione natura curvae quaesitae elicietur.

5. His praemissis quaestionem priorem, quam ex problemate proposito formavi, aggredior atque inter omnes curvas iisdem terminis contentas eam definiam, in qua sit $\int r^m ds$ minimum. In hanc finem sumta recta quacunque pro axe sit abscissa $= x$ et applicata $= y$; erit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, atque posito dx constante habebitur

$$r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}\,.$$

Cum autem fieri debeat $dy = pdx$ et $dp = qdx$, erit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ et $ddy = qdx^2$, unde prodit

$$r = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{q}\,,$$

ac formula integralis, quae minima esse debet, fiet

$$= \int \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}\,.$$

Habebitur ergo

$$Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

hincque porro

$$dZ = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}} p\,dp}{q^m} - \frac{m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}} dq}{q^{m+1}},$$

quae expressio cum superiore universali comparata dat

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}} p}{q^m},$$

$$Q = \frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^{m+1}}, \quad R = 0, \quad S = 0 \quad \text{etc.}$$

Quocirca habebitur

$$V = -\frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2}$$

atque pro curva quaesita prodibit ista aequatio: $0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2}$; quae integrata dat $A\,dx = -P\,dx + dQ$.

6. Antequam autem loco P et Q debitos valores substituam, secundam integrationem perficere tentabo, in subsidium vocando aequationes $dp = q\,dx$ et $dZ = P\,dp + Q\,dq$. Substituto vero $\frac{dp}{q}$ loco dx aequatio inventa transit in hanc:

$$A\,dp = -P\,dp + q\,dQ$$

haecque denuo ob $P\,dp = dZ - Q\,dq$ in istam:

$$A\,dp = -dZ + Q\,dq + q\,dQ,$$

cuius integralis est $Ap + B = -Z + Qq$. Nunc tandem substitutionibus utar obtineboque propter

$$Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m} \quad \text{et} \quad Qq = -\frac{m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

mutatis signis constantium A et B hanc aequationem

$$Ap + B = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m},$$

quae ducta in dx ob $y = \int p\,dx$ et integrata suppeditabit istam aequationem

$$Ay + Bx = (m+1)\int \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}\,dx}{q^m} = (m+1)\int r^m\,ds\,,$$

ex qua perspicitur eam curvam esse habituram $\int r^m\,ds$ minimum, in qua sit

$$\int r^m\,ds = Ay + Bx\,.$$

Quoniam autem axe utcunque mutato r et s non mutantur, ita axis accipiatur, ut $Ay + Bx$ abeat vel in solam abscissam vel solam applicatam: quod cum fieri liceat sine ulla restrictione, vel A vel B poni poterit $= 0$. Quamobrem pro curva quaesita habebitur vel ista aequatio

$$Ax = (m+1)\int r^m\,ds \quad \text{vel} \quad Ay = (m+1)\int r^m\,ds\,.$$

7. Quo homogeneitas quantitatum observetur, ponam $A = a^m$ atque ista utar aequatione $a^m x = (m+1)\int r^m\,ds$, ex qua penitius in curvae naturam inquiram. Optime autem curvae satisfacientis indoles cognoscetur ex aequatione inter duas variabiles tantum, cuiusmodi aequationem duplici modo exhiberi licet, altero inter variabiles r et s, per quam aequationem natura ipsius curvae sine ullo ad quempiam axem respectu habito designatur; altero modo autem inter variabiles x et y aequatio indicabitur, quae tum ad curvae constructionem tum ad cognitionem, qualis sit, est maxime accommodata. Priore modo aequatio inter r et s reperietur, dum x ex aequatione

$$a^m x = (m+1)\int r^m\,ds$$

vel ex eius differentiali $a^m\,dx = (m+1)r^m\,ds$ eliminabitur; id quod hoc modo praestabitur: cum $\frac{dx}{ds}$ posito sinu toto $= 1$ sit sinus arcus, cuius differentiale est $\frac{ds}{r}$, erit

$$\frac{dx}{ds} = \text{sin arcus}\int \frac{ds}{r}\,,$$

quo valore substituto ista habebitur aequatio

$$a^m \text{ sin arcus}\int \frac{ds}{r} = (m+1)\,r^m$$

ac loco $\frac{a^m}{m+1}$ scripto c^m, erit

$$\int \frac{ds}{r} = \text{arcui, cuius sinus est } \frac{r^m}{c^m} = \int \frac{m r^{m-1}\,dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}}\,.$$

Sumtis ergo differentialibus erit

$$ds = \frac{mr^m dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}}$$

atque capiendo integralia habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$s = m\int \frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m} - r^{2m})}},$$

qua arcus ex dato radio osculi determinatur.

8. Ad aequationem autem inter coordinatas orthogonales x et y eliciendam adhibeo aequationem supra inventam, in qua etiamnum p et q continentur, quae huc redit

$$a^m q^m = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}.$$

Haec autem porro reducitur ad hanc $aq = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}$, quarum quidem utraque ad curvam construendam sufficere posset, cum duae tantum insint variabiles p et q. Quia autem est $qdx = dp$, habebitur

$$adp = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}} dx \quad \text{seu} \quad dx = \frac{adp}{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}.$$

Deinde ob $dy = pdx$ erit

$$dy = \frac{apdp}{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}},$$

unde integrando obtinetur

$$y = -\frac{ma}{(m + 1)(1 + pp)^{\frac{m+1}{2m}}} + b$$

hincque

$$\frac{ma}{(m + 1)(b - y)} = (1 + pp)^{\frac{m+1}{2m}}.$$

Fiat $\frac{ma}{m+1} = -c$ et ponatur $b = 0$, quia hoc pacto amplitudo aequationis nihil restringitur, habebiturque

$$\frac{c}{y} = (1 + pp)^{\frac{m+1}{2m}} \quad \text{atque} \quad 1 + pp = \frac{c^{\frac{2m}{m+1}}}{y^{\frac{2m}{m+1}}};$$

ex quo fit

$$p = \frac{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}{y^{\frac{m}{m+1}}}.$$

Cum nunc sit $dx = \frac{dy}{p}$, orietur aequatio pro curva quaesita inter coordinatas x et y ista

$$x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}$$

atque in ea erit

$$\int r^m ds = \frac{(m+1)^m}{m^m} c^m x .$$

Curva igitur quaesita erit algebraica, quoties fuerit vel $m = \frac{1}{2i}$ vel $m = -\frac{1}{2i+1}$, denotante i numerum integrum affirmativum quemcunque.

9. Casus hic nonnulli particulares seorsim considerari merentur, quorum primus esto, si $m = -1$ seu quo curva desideratur, in qua $\int \frac{ds}{r}$ sit maximum minimumve. Hoc autem casu ob $m + 1 = 0$ in omnibus aequationibus inventis accidit incommodum, ut iudicium difficile videatur. At attentius rem consideranti patebit hunc casum ne quidem ad quaestionem de maximis et minimis pertinere, cum $\frac{ds}{r}$ integrationem admittat, existente $\int \frac{ds}{r}$ arcu circuli, cuius sinus est $\frac{dx}{ds}$; adeo ut $\int \frac{ds}{r}$ non ad totam curvam pertineat, sed ex positione extremi curvae elementi respectu axis assumti pendeat. Alter casus est, quo $m = 0$ seu quo curva quaesita minima esse debet inter suos terminos. Hic facillime cognoscetur ex aequatione

$$A^m q^m = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}},$$

quae posito $m = 0$ praebet $p = \text{const.}$, unde intelligitur huic casui lineam rectam satisfacere. Denique attendamus ad casum $m = 1$, quo curva quaeritur, quae inter omnes alias habeat $\int r ds$ minimum. Pro hac autem curva reperitur ista aequatio

$$x = \int \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(c - y)}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{(cy - yy)}},$$

ex qua manifestum est curvam satisfacientem esse cycloidem, cuius cuspis in altero termino dato collocatur et basis in ipsum axem incidit. Fiet autem $\int r ds = 2cx$; unde intelligitur quaestioni maxime satisfieri, si eiusmodi cyclois eligatur, cuius binae cuspides in ambos terminos praescriptos incidant.

10. Atque hactenus quidem minimi valoris tantum mentio est facta, qui expressioni $\int r^m ds$ sit conciliandus, cum tamen methodus adhibita etiam maximum, si quod habetur, indicet. Si enim m, uti feci, tanquam numerus

affirmativus consideretur, $\int r^m ds$ maximum habebit valorem, si sit $r = \infty$ lineaque quaesita recta, qui casus maximi cum sponte innotescat, illo inveniendo supersedendum censui, etiamsi is quoque ex aequatione inventa

$$Ap + B = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

fluat faciendo A et B infinite magna, quo casu fit $p =$ constanti. Contra vero accidit, si m fuerit numerus nihilo minor, huicque quaestioni recta semper ita satisfacit, ut sit $\int r^m ds$ minimum, quippe $= 0$; curvae igitur, quas pro his casibus aequationes inventae suppeditant, ita sunt comparatae, ut in iis sit $\int r^m ds$ maximum. Ita si ponatur $m = -2$, curva reperietur, quae inter omnes iisdem terminis contentas sit habitura $\int \frac{ds}{r^2}$ maximum, non minimum. Curva autem ista hac continebitur aequatione

$$x = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(c^4 - y^4)}},$$

ex qua intelligitur curvam satisfacientem esse elasticam ad axem orthogonalem, seu cuius tangentes in punctis flexus contrarii sint inter se parallelae atque normales ad axem, in quo abscissae x capiuntur. Erit autem

$$\int \frac{ds}{r^2} = \frac{4x}{c^2}.$$

11. In his autem lineis curvis, quae problemati satisfacere sunt inventae, parodoxon evenit, quod in aliis huius generis problematis usu venire non solet. Cum enim axis, in quo abscissae capiuntur, respectu duorum praescriptorum terminorum, per quos curva transire debet, positione aliter non determinetur, nisi quod per alterum terminum transire debeat, infinitis modis parameter curvae c accipi poterit, ita ut curva per alterum terminum transeat, id quod fiet axi debitam positionem tribuendo. Quamobrem solutio inventa innumerabiles continet curvas problemati satisfacientes, cum tamen unica satisfacere videatur; namque vel in his omnibus curvis $\int r^m ds$ eundem valorem obtinet, quod tamen non accidit, vel secus, quo casu ea, in qua $\int r^m ds$ erit vel maximum vel minimum, problemati sola satisfacere censenda est. Ita casu $m = 1$, pro quo cyclois est inventa, cuius cuspis in altero termino sit positus, parameter cycloidis seu magnitudo circuli generatoris non definitur; quaecunque enim cyclois assumatur, ea ita poterit constitui, ut quoque per alterum terminum transeat. At facile colligire licet, ex quo minore circulo

cyclois generetur, eo minorem quoque fore $\int r ds$; ita ut huic quaestioni stricte acceptae ea cyclois maxime satisfaciat, quae a circulo minimo seu infinite parvo sit nata; cuiusmodi curva, etsi a recta differre non videatur, tamen maxime discrepat, eo quod longitudine est diversa, atque ubique radium osculi habet infinite parvum.

12. Cum igitur solutio huius problematis, prout id quidem est propositum, innumeras praebeat curvas, concludendum est ipsum problema non satis esse determinatum eique insuper unam conditionem adiungi posse, qua etiam quantitas parametri seu quantitatis constantis c, quae in aequatione pro curva inventa

$$x = \int \frac{\sqrt[m]{y^{m+1}}\, dy}{\sqrt{(\sqrt[2m]{c^{m+1}} - \sqrt[2m]{y^{m+1}})}}$$

inest, determinetur. Eiusmodi autem conditio duplex adiungi poterit, quarum altera ex amplitudine curvae non incongrue desumetur; aestimatur autem amplitudo curvae ex angulo, quem tangentes curvae in terminis praescriptis, per quos curva transire debet, invicem constituunt. Ex quo solutio inventa huic problemati satisfaciet, quo inter omnes curvas eiusdem amplitudinis per data duo puncta transeuntes ea requiritur, quae habeat $\int r^m ds$ maximum minimumve. Vel loco amplitudinis curvae in problemate proposito tertium quodpiam punctum praescribi potest, per quod curva quaesita simul transeat; hac enim conditione adiecta pariter quantitas indefinita c determinabitur. Problema igitur ita proponatur, ut inter omnes curvas per tria data puncta transeuntes ea definiatur, in qua esset $\int r^m ds$ maximum vel minimum. Utrovis autem modo problema proponatur, ex solutione unica curva reperietur, quae omnium maxime satisfaciet. Quemadmodum igitur, si in formula integrali, quae maxima minimave esse debet, differentialia primi tantum gradus insunt, duo tantum puncta praescribere licet, per quae curva quaesita transeat, ita si formula illa integralis differentialia secundi gradus contineat, tria puncta, per quae curva quaesita ducatur, dari oportet. Ex quo colligitur, si differentialia tertii ordinis in illam formulam ingrediantur, tum problema non fore determinatum, nisi quatuor puncta sint praescripta, per quae curva quaesita transeat, et ita porro. Quo altiora enim differentialia in aequationem quampiam ingrediuntur, eo latius ea patet pluresque restrictiones admittit, propter plures integrationes, quarum singulae novam constantem indefinitam inducunt. Atque ex his natura huismodi problematum, quibus curvae maxima minimave

quadam proprietate gaudentes requiruntur, clarius perspicitur, quam ante solutionem actu transactam fieri potuisset.

13. Haec autem attentius considerantibus planum fiet numerum punctorum, quae ad curvam aequatione contentam determinandam requiruntur, pendere a gradu differentialium, quibus aequatio primitiva

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

erit affecta, eliminatis quantitatibus in subsidium vocatis p, q, r etc., ut tantum x et y cum suis differentialibus insint. Ita si haec aequatio statim fuerit algebraica, tum dato axe initioque abscissarum ne unicum quidem punctum praescribi potest, per quod curva quasita transeat, sed curva inventa inter omnes omnino curvas ad eundem axem relatas nulla insuper conditione adiuncta praescriptam proprietatem maximi minimive habebit. Sic si $\int (ay - xx)ydx$ maximum minimumve esse debeat, reperietur curva hac aequatione expressa $2ay = xx$, quae quaesito inter omnes omnino curvas ad eundem axem relatas maxime satisfacit. Aequatio autem generalis $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{etc.}$ neque differentialis primi gradus unquam fieri potest neque tertii gradus differentialis neque quinti neque ullius gradus imparis. Quoties autem prodit aequatio differentialis secundi gradus, quod in omnibus fere problematis adhuc tractatis usu venit, tum duo puncta pro lubitu assignari possunt, per quae curva quaesita transeat. His igitur casibus curva invenitur, quae inter omnes alias per eadem duo puncta ductas praescripta maximi minimive proprietate est praedita. Cum autem ad aequationem differentialem quarti ordinis pervenitur, tum curva inventa quaeque habebit formulam $\int Zdx$ maximam minimamve non inter omnes omnino curvas, sed inter omnes tantum, quae cum inventa quatuor puncta habent communia. Simili modo aequatio differentialis sexti gradus sex puncta data ad curvam determinandam requiret, et ita porro. Quod autem in nostro casu curvam tribus tantum punctis determinari dixi, cum tamen ea ex aequatione differentiali quarti gradus sit orta, inde venit, quod datum curvae punctum in uno datorum punctorum collocaverim; quae conditio non necessaria si omittatur, tum aequatio inventa ad definitam curvam restringetur, si quatuor puncta, per quae transeat, praescribantur. Ita cyclois per quatuor data puncta descripta prae omnibus aliis curvis per eadem puncta transeuntibus hanc habebit praerogativam, ut in ea $\int rds$ minimum obtineat valorem.

14. Missis autem his, quae ad generalem problematis Isoperimetrici indolem potius, quam ad meum institutum pertinet, ad alteram quaestionem solvendam progrediar, quae est ipsa a Celeberrimo BERNOULLIO proposita. Quaeritur autem in ea curva, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis habeat $\int r^m ds$ maximum minimumve. Hic igitur habentur duae formulae integrales $\int ds$ et $\int r^m ds$, quarum utrique valor ipsius V respondens est investigandus; quippe quo facto duo isti valores vel eorum multipli quique invicem additi et $= 0$ positi naturam curvae quaesitae exhibebunt. Adhibitis autem substitutionibus $dy = pdx$, $dp = qdx$ formulae illae abibunt in has

$$\int dx \sqrt{(1 + pp)} \quad \text{et} \quad \int \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m};$$

quarum illi respondet iste valor ipsius V:

$$-\frac{dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}} dx};$$

pro altera autem erit ut ante

$$V = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

existente

$$P = \frac{(3m + 1)(1 + pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m} p \quad \text{et} \quad Q = -\frac{m(1 + pp)^{3m+1}}{q^{m+1}}.$$

Quamobrem pro curva quaesita orietur ista aequatio

$$\frac{A dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}} = dP - \frac{ddQ}{dx},$$

quae integrata dat

$$\frac{Ap}{\sqrt{(1 + pp)}} + B = P - \frac{dQ}{dx}.$$

Multiplicetur utrinque per dp seu qdx et prodibit

$$\frac{Apdp}{\sqrt{(1 + pp)}} + Bdp = Pdp - qdQ = Pdp + Qdq - Qdq - qdQ;$$

quae denuo integrata dat

$$A\sqrt{(1 + pp)} + Bp + C = Z - Qq \quad \text{existente} \quad Z = \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}.$$

Restitutis igitur loco Z et Q suis valoribus orietur haec aequatio

$$A\sqrt{(1 + pp)} + Bp + C = \frac{(m + 1)(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m},$$

quae per dx multiplicata, eliminatis p et q abit in hanc

$$A\,ds + B\,dy + C\,dx = (m+1)\,r^m\,ds\,,$$

in qua, ut supra notavi, sine ulla restrictione vel B vel C nihilo aequale poni potest.

15. Ponam igitur $B = 0$, at primo quaeram aequationem inter r et s ex hac aequatione

$$A\,ds + C\,dx = (m+1)\,r^m\,ds\,.$$

Ex superioribus autem patet esse

$$\frac{dx}{ds} = \text{sinui arcus } \int\frac{ds}{r}\,,$$

unde loco dx suo substituto valore orietur

$$A + C \text{ sin arcus } \int\frac{ds}{r} = (m+1)\,r^m\,,$$

unde erit

$$\int\frac{ds}{r} = \text{arcui, cuius sinus est } \frac{(m+1)r^m - A}{C} \text{ seu cuius sinus est } \frac{r^m \pm a^m}{c^m}\,.$$

Hinc ergo sumtis differentialibus emerget haec aequatio

$$\frac{ds}{r} = \frac{m r^{m-1}\,dr}{\sqrt{(c^{2m} - (r^m \pm a^m)^2)}}\,,$$

ex hacque porro ista

$$s = m\int\frac{r^m\,dr}{\sqrt{(c^{2m} - (r^m \pm a^m)^2)}}\,.$$

Casu igitur, quo inter omnes curvas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes quaeritur ea, in qua sit $\int r\,ds$ minimum maximumve, habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$s = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{(c^2 - r^2 \pm 2ar - aa)}}\,,$$

quae apprime convenit cum BERNOULLIANA mecum communicata ista

$$ds = \frac{2r\,dr}{\sqrt{(g + 4nr - 4rr)}}\,,$$

est namque $\frac{g}{4} = c^2 - a^2$ et $n = \pm 2a$.

16. Constructio autem curvae quasitae commodissime ex aequatione

$$A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

deducetur, quae posito $B = 0$ mutatisque constantibus abit in hanc:

$$q = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}{\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)} + C)}}.$$

Multiplicetur per dx et ob $qdx = dp$ habebitur

$$dx = \frac{dp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)} + C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}} \text{ atque } dy = \frac{pdp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)} + C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}},$$

quae posterior aequatio facto $\sqrt{(1+pp)} = u$ transmutatur in istam

$$dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au + C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$$

tractatu faciliorem. Ex his autem aequationibus curva per quadraturas facile construitur. Aequatio vero differentialis primi gradus inter x et y ex istis aequationibus generalibus ob m numerum indefinitum formari nequit, at aequatio differentialis secundi gradus ob $dp = \frac{ddy}{dx}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$ obtinebitur ista

$$ds^{\frac{3m+1}{m}} = dxddy\sqrt[m]{(Ads + Cdx)}$$

ad curvam cognoscendam parum idonea. Interim tamen casus est notandus, quo etiam fit $C = 0$; tum enim aequatio $Ads = (m+1)r^m ds$ praebet $r = \text{const.}$, quae est proprietas circuli. Circulus igitur inter omnes alias curvas eiusdem longitudinis et per eadem quatuor puncta ductas habebit $\int r^m ds$ maximum minimumve.

17. Considerabo autem praecipue casum, quo $m = 1$, in quo inter omnes curvas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes ea quaeritur, in qua sit $\int r ds$ maximum minimumve. Isto autem casu aequatio superior

$$dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au + C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$$

abit in hanc $dy = \frac{A\,du}{u^2} + \frac{C\,du}{u^3}$, cuius integralis est $y = a + \frac{2b}{u} + \frac{c}{uu}$ constantibus mutatis; unde fit

$$u^2 = \frac{2bu + c}{y - a} \quad \text{atque} \quad u = \sqrt{(1 + pp)} = \frac{b \pm \sqrt{(bb - ac + cy)}}{y - a},$$

ex qua elicitur

$$p = \frac{\sqrt{(2bb - ac - aa + 2ay + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb - ac + cy)})}}{y - a} = \frac{dy}{dx}.$$

Fiat $a = 0$, quia applicatam y augere licet quacunque constante sine ulla restrictione, et habebitur

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2bb + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb + cy)})}}$$

pro aequatione, qua curvae natura exprimitur. Signorum autem ambiguorum $\pm$ alterum dabit eam curvam, in qua $\int r\,ds$ est maximum, alterum, in qua minimum. Perspicuum autem est, si fiat $b = 0$, tum aequationem exhibituram esse cycloidem, quae iam ante est inventa et satisfacit sola, quando conditio aequalitatis curvarum omittitur.

METHODUS INVENIENDI INFINITAS CURVAS ISOPERIMETRAS ALIAVE COMMUNI PROPRIETATE PRAEDITAS

Commentatio 250 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1756/7), 1761, p. 3—36
Summarium ibidem p. 5—6

SUMMARIUM

Quaestio hic non parum ardua evolvitur, qua intra datos terminos infinitae lineae curvae vel eiusdem longitudinis vel alia quadam proprietate communi praeditae requiruntur. Occasionem huius investigationis suppeditavit famosissimum illud problema Isoperimetricum, quo inter omnes lineas, quas quidem intra datos terminos concipere licet, quae vel sint eiusdem longitudinis vel alia quadam communi proprietate gaudeant, eam determinari oportet, quae vel maximam aream includat vel alia quadam maximi minimive proprietate reliquis antecellat. Hic igitur manifesto assumitur dari utique intra propositos terminos infinitos ductus curvilineos, qui omnes sint eiusdem longitudinis vel aliam quandam proprietatem habeant communem, quod quidem minime est dubium, cum quaestio non solum circa lineas curvas continuas, sed etiam discontinuas seu quocunque manus ductu describendas versetur. Veluti si intra datos duos terminos arcus circularis proponatur, non solum innumerabiles aliarum curvarum continuarum arcus intra eosdem terminos aeque longi assignari possunt, sed si etiam tractus curvilinei irregulares admittantur, eorum numerus multo magis in infinitum augetur. In problemate quidem isoperimetrico non opus est hos tractus curvilineos omnes nosse, sed methodus singulari artificio ita est comparata, ut inter eos omnes, etiamsi sint ignoti, is, cui maximi minimive quaedam proprietas conveniat, investigari possit: electionem scilicet instituere licet, etiamsi omnes res, inter quas est eligendum, neutiquam sint cognitae, quod certe insigni nostro commodo accidit; si enim ad hanc electionem requireretur, ut omnes lineae illae eiusdem longitudinis essent perspectae, plurimum adhuc a solutione istius pulcherrimi problematis, quod nomine isoperimetrici innotuit, essemus remoti. Interim tamen haec speculatio, qua intra datos terminos infinitae quaeruntur lineae curvae, quae vel omnes longitudine sint aequales vel alia quadam communi indole praeditae, maxime est

notatu digna, cum ob alios usus in Geometria sublimiori haud contemnendos tum vero praecipue, quod haec ipsa investigatio maximis difficultatibus est obnoxia. Iam olim enim Geometrae ingenti studio in hoc elaboravere, ut proposita linea curva alias eiusdem longitudinis explorarent; neque tamen ipsis scopum attingere licuit. In hac autem dissertatione Celeberrimus Auctor omnia huiusmodi problemata felicissimo successu resolvit, idque ope methodi omnino singularis, quam quasi methodo DIOPHANTEAE analogam iam pridem in Analysin sublimiorem introduxerat eiusque iam plurima insignia ediderat specimina.

In celebri illo problemate isoperimetrico quaeri solet inter omnes lineas curvas per data duo puncta transeuntes ac longitudine aequales ea, quae maximi minimive cuiusdam proprietate gaudeat. Hoc igitur problema innititur isti hypothesi, quod datis duobus punctis infinitae existant lineae curvae longitudine aequales, quae omnes intra haec puncta tanquam terminos contineantur. Quanquam autem nullum est dubium, quin per data duo puncta innumerabiles duci queant lineae curvae, quae omnes longitudinem eandem habeant, tamen si omnes istae curvae exhiberi debeant vel aequatio generalis desideretur eas omnes complectens, quaestio non parum ardua videtur. Atque si ad solutionem problematis isoperimetrici id opus fuisset, ut omnes curvae isoperimetrae intra datos terminos contentae exhiberentur et ad electionem maximi minimive quasi proponerentur, nondum fortasse aditus ad hoc problema patuisset.

Remota autem huius problematis mentione ipsa quaestio de inveniendis infinitis lineis curvis isoperimetris, quae intra datos terminos sint descriptae, omni attentione digna videtur, et quoniam eius solutio peculiaria calculi artificia postulat, quemadmodum cuique tentanti mox patebit, pro Analysi inde non spernenda incrementa expectare licebit. Praecipue autem multo maiorem fructum hinc percipiemus, si problemati longe ampliorem extensionem tribuamus, ita, ut non solum curvas eiusdem longitudinis, sed quae alia quacunque indole communi sint praeditae, definire doceamus, quae intra eosdem terminos sint contentae. Quousque igitur mihi in tractatione huius problematis latiori sensu accepti pertingere licuerit, hic dilucide explicare constitui atque, ut ordine procedam, a quaestionibus simplicioribus huc pertinentibus exordiar.

PROBLEMA 1

1. Invenire aequationem generalem pro omnibus curvis, quae per data duo puncta transeant.

SOLUTIO

Referentur omnes hae curvae inveniendae ad eundem axem easdemque coordinatas orthogonales sitque abscissa $= x$, applicata $= y$. Bina autem puncta data respondeant his duobus ipsius x valoribus $x = 0$ et $x = a$; ac pro illo quidem sit $y = b$, pro hoc vero $y = c$. Quaestio ergo huc redit, ut eiusmodi relatio in genere inter x et y definiatur, quae posito $x = 0$ praebeat $y = b$, posito autem $x = a$ det $y = c$; sin autem abscissae x alii valores tribuantur, respondentes applicatae y valores in infinitum variare debent, propterea quod singulae curvae inter se debent esse diversae. Sit X eiusmodi functio ipsius x, quae posito $x = 0$ vel $x = a$ fiat vel $= b$ vel $= c$, atque manifestum est aequationem $y = X$ unam praebere curvam per proposita ambo puncta transeuntem. Denotet iam P functionem quamcunque ipsius x indefinitam ac ponatur $y = X + x(a - x)P$, ubi manifestum est, sive statuatur $x = 0$ sive $x = a$, alterum membrum $x(a - x)P$ in nihilum esse abiturum, dummodo P neque per x neque per $a - x$ sit divisum sicque alteruter factorum x et $a - x$ tollatur. Idem eveniet, si ponatur

$$y = X + x^m(a - x)^n P ,$$

dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, ex quo perspicuum est omnes curvas hac aequatione $y = X + x^m(a - x)^n P$ contentas ita fore comparatas, ut, sive ponatur $x = 0$ sive $x = a$, iidem pro y prodeant valores, quaecunque functio ipsius x loco P substituatur. Ergo omnes hae curvae per eadem duo puncta abscissis $x = 0$ et $x = a$ respondentia transibunt, per quae transit curva aequatione $y = X$ contenta; et quoniam assumtio functionis P latissime patet, perspicuum est hanc aequationem omnes omnino curvas per ambo proposita puncta transeuntes continere.

COROLLARIUM 1

2. Data ergo curva hac aequatione $y = X$ expressa vel saltem eius portione, quae respondet abscissae $= a$, cuius propterea ambo termini erunt noti, omnes curvae hac aequatione generalissima contentae

$$y = X + x^m(a - x)^n P$$

per eosdem terminos transibunt, quaecunque pro P substituatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores neuterque horum factorum x^m et $(a - x)^n$ per divisionem destruatur. Quippe qui factores sunt necessarii ad hanc proprietatem producendam.

COROLLARIUM 2

3. Scilicet si curvae hac aequatione $y = X$ expressae punctum abscissae $x = 0$ respondens sit A, abscissae vero $x = a$ respondens sit B, quae puncta A et B in figura notata sunt intelligenda, tum omnes curvae hac aequatione $y = X + x^m(a - x)^n P$ contentae per eadem duo puncta A et B transibunt.

COROLLARIUM 3

4. Si in curva, cuius aequatio $y = X$, notentur tria puncta A, B, C, quae tribus abscissis $x = 0$, $x = a$, $x = b$ conveniant, simili modo infinitae aliae curvae exhiberi poterunt, quae per eadem tria puncta A, B, C transibunt, omnes enim hac aequatione generali continebuntur

$$y = X + x^m(a - x)^n(b - x)^p P \ .$$

COROLLARIUM 4

5. Simili modo facile erit infinitas curvas invenire, quae per quatuor plurave puncta data datae curvae $y = X$ transeant; si enim haec puncta sint A, B, C, D etc., quae respondeant abscissis

$$x = 0 \ , \quad x = a \ , \quad x = b \ , \quad x = c \quad \text{etc.},$$

curvae quaesitae hac comprehendentur aequatione:

$$y = X + x^m(a - x)^n(b - x)^p(c - x)^q \quad \text{etc.} \quad P \ ,$$

dummodo exponentes m, n, p, q etc. sint nihilo maiores nullusque factorum per indolem functionis P destruatur.

COROLLARIUM 5

6. Si ergo curva data sit circulus in eiusque peripheria puncta quotcunque notentur, aliae infinitae curvae describi poterunt, quae per omnia haec puncta transeant.

SCHOLION 1

7. Si coordinatae curvae datae per functiones quasdam novae variabilis u dentur, ita ut sit

$$x = U \quad \text{et} \quad y = V \ ,$$

huiusque curvae duo puncta A et B reperiantur, si ponatur $u = f$ et $u = g$, ita ut posito $u = f$ fiat $x = 0$ et posito $u = g$ fiat $x = a$, tum infinitae

aliae invenientur curvae per eadem duo puncta A et B transeuntes ope harum formularum

$$x = U + (f - u)^{\mu}(g - u)^{\nu} P$$

et

$$y = V + (f - u)^{m}(g - u)^{n} Q \ ,$$

quaecunque functiones ipsius u loco P et Q scribantur, dummodo factorum nullus destruatur exponentesque μ, ν, m, n nihilo sint maiores. Perspicuum est enim, sive ponatur $u = f$ sive $u = g$, coordinatas x et y prodire plane easdem, quaecunque functiones litteris P et Q tribuantur. Simili etiam modo solutio adornabitur, si curvae quaesitae per tria plurave puncta data curvae propositae transire debeant; atque etiam patet hoc modo non solum curvas algebraicas, sed etiam transcendentes cuiusque ordinis exhiberi posse, cum nihil impediat, quominus pro P et Q etiam functiones transcendentes ipsius u accipiantur.

SCHOLION 2

8. Cuique patet functionibus P et Q eiusmodi adiunctos esse factores, qui utroque casu proposito $u = f$ et $u = g$ evanescant, ita ut his casibus, quibus oriuntur abscissae $x = 0$ et $x = a$, posteriora utriusque formulae membra evanescant indeque pro coordinatis iidem prodeant valores $x = U$ et $y = V$, qui ipsi curvae propositae conveniunt. Haec ergo conditio ut impleatur, haec istorum factorum forma

$$(f - u)^{m}(g - u)^{n}$$

simplicissima et commodissima est visa; interim tamen occurrere possunt casus, quibus haec forma idoneos non suppeditat factores, veluti si alterum curvae punctum obtineatur ponendo $u = \infty$, ita ut sit $g = \infty$; tum enim huius modi factor

$$(f - u)^{m}(\infty - u)^{n}$$

calculum maxime perturbaret. Hoc autem casu non erit difficile eiusmodi formas excogitare in terminis finitis, quae tam casu $u = f$ quam casu $u = \infty$ evanescant; scilicet huic conditioni satisfacient haec forma

$$\frac{(f - u)^{m}}{(k + u)^{n}} \ ,$$

dummodo sit $n > m$, quo casu $u = \infty$ numerator prae denominatore, etiamsi uterque fiat infinitus, evanescat; k autem ita capi debet, ut numerator et de-

nominator communem non adipiscantur divisorem. Ita, si ambo puncta data prodeant ex valoribus $u = 0$ et $u = \infty$, factores idonei erunt:

$$\frac{u}{(k+u)^2} \text{ vel } \frac{u}{k+u^2} \text{ vel } \frac{u^m}{A + Bu^\alpha + Cu^\beta + Du^\gamma \text{ etc.}},$$

dummodo in denominatore altior occurrat potestas ipsius u, quam est numerator u^m.

PROBLEMA 2

9. Infinitas invenire lineas curvas, quae non solum per data duo puncta transeant, sed etiam in his punctis communi gaudeant tangente.

SOLUTIO

Sit ut ante $y = X$ aequatio pro una curva, quae datam habeat proprietatem, atque duo puncta data oriantur ex valoribus abscissae $x = 0$ et $x = a$.

Iam ut omnes curvae quaesitae per eadem puncta transeant, videmus eas hac contineri aequatione

$$y = X + x^m(a - x)^n P$$

existente P functione quacunque ipsius x. Tum vero, ut in his punctis omnes curvae communi tangente gaudeant, necesse est, ut casu utroque $x = 0$ et $x = a$ valor $\frac{dy}{dx}$ idem plane prodeat, qui oritur ex aequatione $y = X$, seu ut is sit $= \frac{dX}{dx}$. Fiet autem inde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} + mx^{m-1}(a-x)^n P - nx^m(a-x)^{n-1} P + x^m(a-x)^n \frac{dP}{dx},$$

ubi manifestum est hunc valorem redigi ad $\frac{dX}{dx}$ casibus $x = 0$ et $x = a$, si non solum exponentes m et n, sed etiam $m - 1$ et $n - 1$ fuerint nihilo maiores. Quamobrem aequatio

$$y = X + x^m(a - x)^n P$$

etiam in propositis duobus punctis eandem tangentium positionem praebebit, si exponentes m et n non solum nihilo, sed etiam unitate fuerint maiores.

Simili modo si ambae coordinatae x et y per novam variabilem u dentur,

cuius valores $u = f$ et $u = g$ data duo puncta exhibeant, infinitae curvae quaesito satisfacientes in his formulis continebuntur.

$$x = U + (f - u)^m (g - u)^n P$$

et

$$y = V + (f - u)^\mu (g - u)^\nu Q \ ,$$

quaecunque functiones ipsius u, sive algebraicae sive transcendentes, pro P et Q substituantur, dummodo, quae cautio semper est tenenda, neutra factorem sibi adiunctum destruat. Insuper vero ad communionem tangentium in his punctis requiritur, ut exponentes m, n, μ, ν singuli sint unitate maiores. Quoniam enim tum utroque casu $u = f$ et $u = g$ fit

$$\frac{dx}{du} = \frac{dU}{du} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{du} = \frac{dV}{du},$$

erit etiam $\frac{dy}{dx} = \frac{dV}{dU}$, qui valor a functionibus P et Q neutiquam pendet.

COROLLARIUM 1

10. Data ergo curva quacunque intra duo puncta A et B descripta, cuius aequatio inter coordinatas x et y est vel $y = X$ vel his formulis continetur $x = U$ et $y = V$, infinitae aliae curvae exhiberi possunt, quae non solum per eosdem terminos A et B transeant, sed etiam in his punctis communi tangente gaudeant.

COROLLARIUM 2

11. Quodsi exponentes in formulis inventis adhibiti non solum unitate, sed etiam binario fuerint maiores, tum etiam utroque casu $x = 0$ et $x = a$ vel $u = f$ et $u = g$, hoc est in ambobus terminis, differentialia secundi gradus inter se convenient. Scilicet in his punctis non solum omnium curvarum inventarum eadem erit directio, sed etiam eandem curvaturam habebunt.

SCHOLION

12. Quemadmodum ergo ante vidimus, si habeatur variabilis cuiusdam u talis functio z, ut sit

$$z = (f - u)^m (g - u)^n P \ ,$$

utroque casu $u = f$ et $u = g$ fieri $z = 0$, quaecunque P fuerit functio ipsius u, dummodo exponentes m et n fuerint nihilo maiores: ita nunc porro patet:

II. Si exponentes m et n fuerint unitate maiores, fore utroque casu $u = f$ et $u = g$ et

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{du} = 0 \ .$$

III. Si exponentes m et n fuerint binario maiores, fore utroque casu $u = f$ et $u = g$ et

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{du} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{du^2} = 0 \ .$$

IV. Si exponentes m et n sint ternario maiores, fore utroque casu $u = f$ et $u = g$ et

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{du} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{du^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3z}{du^3} = 0$$

etc.

Perspicuum est, quae hic de duobus casibus $u = f$ et $u = g$ sunt annotata, etiam ad casus tres, nempe $u = f$, $u = g$ et $u = h$ extendi, si aequatio fuerit huiusmodi:

$$z = (f - u)^m (g - u)^n (h - u)^p P \ .$$

Quodsi autem in casu duorum punctorum fuerit $g = \infty$, tum loco factoris $(f - u)^m (g - u)^n$ capi debet factor huius formae

$$\frac{(f - u)^m}{\alpha + \beta u^\mu + \gamma u^\nu + \text{etc.}} \ ,$$

ita ut in denominatore summae potestatis exponens sit maior quam m, atque tum ex solo exponente m definietur, ad quemnam usque ordinem differentialia ipsius z his duobus casibus evanescant.

PROBLEMA 3

13. Per data duo puncta infinitas ducere lineas curvas, quae omnes cum axe et applicatis extremis aequales areas includant.

SOLUTIO

Respondeant puncta haec data abscissis $x = 0$ et $x = a$, ac posita cuiusque curvae applicata $= y$ erit aequatio generalis pro omnibus curvis per haec duo puncta transeuntibus

$$y = X + x^m (a - x)^n P \ ,$$

dummodo curva $y = X$ per haec duo puncta transeat. Cum iam area huius curvae sit

$$\int y dx = \int X dx + \int x^m (a - x)^n P dx ,$$

quia ea evanescere debet posito $x = 0$, posito autem $x = a$ aequalis esse debet $\int X dx$, manifestum est integrale $\int x^m (a - x)^n P dx$ evanescere debere utroque casu $x = 0$ et $x = a$. Sit igitur

$$\int x^m (a - x)^n P dx = x^{m+1} (a - x)^{n+1} Q ,$$

quam formam ideo assumo, ut inde P sine fractionibus determinetur. Hinc ergo fiet

$$P = (m + 1)(a - x)Q - (n + 1)\, xQ + x(a - x)\frac{dQ}{dx}$$

seu

$$P = ((m + 1)\, a - (m + n + 2)\, x)\, Q + \frac{x(a - x)\, dQ}{dx} .$$

Quare pro curvis quaesitis aequatio generalis erit

$$y = X + ((m + 1)\, a - (m + n + 2)\, x)\, x^m (a - x)^n Q + x^{m+1} (a - x)^{n+1} \frac{dQ}{dx} ;$$

quaecunque enim pro Q assumatur functio ipsius x, dummodo exponentes m et n sint nihilo maiores, omnes curvae per data duo puncta transibunt et cum axe et applicatis extremis, quae scilicet abscissis $x = 0$ et $x = a$ respondent, easdem includent areas, atque curva aequatione $y = X$ contenta.

ALITER

Sit $\int y dx = z$, erit $y = \frac{dz}{dx}$. Iam ut quaesito satisfiat, pro z eiusmodi functionem ipsius x quaeri oportet, ut utroque casu $x = 0$ et $x = a$ tam valor ipsius z quam ipsius $\frac{dz}{dx}$ pro omnibus curvis prodeat idem, id quod evenit, si statuatur

$$z = Z + x^m (a - x)^n P ,$$

dummodo exponentes m et n sint unitate maiores; quaecunque enim pro P assumatur functio ipsius x, utroque casu $x = 0$ et $x = a$ tam pro z quam pro y iidem prodibunt valores. Sit $Z = \int X dx$, erit

$$dz = X dx + (ma - (m + n)\, x)\, x^{m-1} (a - x)^{n-1} P dx + x^m (a - x)^n dP .$$

Pro curvis ergo quaesitis haec habebitur aequatio generalis

$$y = X + (m\,a - (m+n)\,x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}\,P + x^m(a-x)^n\,\frac{dP}{dx},$$

dummodo numeri m et n sint unitate maiores, quae solutio cum praecedente congruit. Pro numeris enim m et n ibi usurpatis hic posuimus $m-1$ et $n-1$ atque Q pro P.

COROLLARIUM 1

14. Data ergo curva quacunque $y = X$ eiusve saltem portione intra abscissas $x = 0$ et $x = a$ contenta aequatio inventa infinitas alias praebebit curvas, quae non solum per eosdem terminos transibunt, sed etiam intra hos terminos aequales areas complectentur.

COROLLARIUM 2

15. Si in solutione posteriori exponentes m et n fuerint non solum unitate, sed etiam binario maiores, tum omnes hae curvae etiam in utroque termino communem habebunt tangentem. Quin etiam insuper communem habebunt curvaturam, si exponentes illi m et n quoque ternario erunt maiores.

COROLLARIUM 3

16. Si curva data $y = X$ fuerit algebraica, non solum infinitae aliae curvae algebraicae eiusdem areae hinc reperientur, sed etiam infinitas curvas transcendentes eiusdem proprietatis exhibere licebit, siquidem pro P functiones transcendentes ipsius x assumantur.

COROLLARIUM 4

17. Si pro P sumatur quantitas constans quaecunque C, hinc iam pro infinitis ipsius C valoribus infinitae reperientur curvae cum data $y = X$ tam eosdem terminos quam eandem aream habentes, quae in hac aequatione continebuntur:

$$y = X + C\,(ma - (m+n)x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}$$

existentibus numeris m et n unitate maioribus.

COROLLARIUM 5

18. Si ambo termini A et B, qui abscissis $x = 0$ et $x = a$ respondent, recta AB iungantur, erit haec recta omnium curvarum inventarum corda

communis. Atque etiam areae, quas omnes hae curvae cum ista corda continent, inter se erunt aequales, quatenus quidem ad eandem cordae partem fuerint sitae; quae enim portiones forte in partem oppositam cadent, eae pro negativis sunt habendae.

EXEMPLUM 1

19. *Proposito circuli quadrante invenire infinitas alias curvas intra eosdem terminos descriptas, quae eandem aream includant.*

Sit radius circuli $= a$ eiusque aequatio $y = \sqrt{(aa - xx)}$, prodibunt quadrantis termini, si ponatur $x = 0$ et $x = a$, et posita $1 : \pi$ ratione diametri ad peripheriam erit area quadrantis $= \frac{1}{4}\pi aa$, cui aequales esse debent areae omnium curvarum per quadrantis terminos ductarum. Omnes ergo istae curvae hac continebuntur aequatione:

$$y = \sqrt{(aa - xx)} + (ma - (m + n)x)x^{m-1}(a - x)^{n-1}P + x^m(a - x)^n\frac{dP}{dx},$$

ubi m et n debent esse numeri unitate maiores.

Ut hinc curvam quampiam simpliciorem eliciamus, ponamus $m = 2$, $n = \frac{3}{2}$ et $P = C(a + x)^{\frac{3}{2}}$; erit

$$dP = \tfrac{3}{2}C dx(a + x)^{\frac{1}{2}},$$

unde fiet

$$y = \sqrt{(aa - xx)} + C(2a - \tfrac{7}{2}x)x(a + x)\sqrt{(aa - xx)} + \tfrac{3}{2}Cx^2(a - x)\sqrt{(aa - xx)}$$

seu

$$y = \sqrt{(aa - xx)} + Cx(2aa - 5xx)\sqrt{(aa - xx)}\ .$$

Ad homogeneitatem conservandam sit $C = \frac{1}{\alpha a^3}$, ut fiat

$$y = \frac{(\alpha a^3 + 2aax - 5x^3)\sqrt{(aa - xx)}}{\alpha a^3}.$$

Si ponamus $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$, $P = C(a + x)^{\frac{3}{2}}$ et $C = \frac{1}{3a^4}$:

$$y = \frac{(aa + 2xx)(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{a^4}\ .$$

EXEMPLUM 2

20. *Propositus sit semicirculus terminos suos in diametri terminis habens, atque invenire oportet infinitas alias curvas per terminos diametri transeuntes, quae omnes cum diametro areas semicirculo aequales includant.*

Sit diameter $= a$, erit aequatio $y = \sqrt{(ax - xx)}$, unde cum fiat $y = 0$ posito tam $x = 0$ quam $x = a$, idem quoque in omnibus curvis, quae quaeruntur, evenire debet; deinde, quia etiam areae, earum diametro insistentes, ipsi semicirculo aequales esse debent, huic conditioni satisfiet hac aequatione generali:

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + (ma - (m + n)x)x^{m-1}(a - x)^{n-1}P + x^m(a - x)^n \frac{dP}{dx},$$

dummodo pro m et n accipiantur numeri unitate maiores. Quoniam igitur etiam pro P functionem quamcunque ipsius x assumere licet, modo ne inconvenienti aliquoties memorato sit obnoxia, patet omnes omnino curvas quaestioni satisfacientes in hac aequatione contineri debere.

Ut curvam quampiam simpliciorem eruamus, ponamus $m = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{3}{2}$, ut sit

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + \left(3(\tfrac{1}{2}a - x)P + x(a - x)\frac{dP}{dx}\right)\sqrt{(ax - xx)} .$$

Ponatur $P = \frac{2}{3b}$ fietque

$$y = \sqrt{(ax - xx)} + \frac{(a - 2x)}{b}\sqrt{(ax - xx)} \quad \text{vel} \quad y = \frac{(b + a - 2x)}{b}\sqrt{(ax - xx)}$$

pro linea quarti ordinis.

$$\text{Si iam sit } b = -a, \quad \text{erit} \quad y = \frac{2x}{a}\sqrt{(ax - xx)} .$$

Haec ergo curva super diametro semicirculi descripta aream habebit semicirculo aequalem. Eadem curva situ inverso prodit, si ponatur $b = a$.

SCHOLION

21. Prior huius problematis solutio, etsi magis naturalis videtur, tamen in problematibus difficilioribus locum non invenit. Hanc ob causam adieci alteram solutionem, cuius fundamentum in eo est positum, quod expressionem areae integralem $\int y\,dx$ ante ad expressionem finitam revocaverim. Haec enim reductio omnino necessaria deprehenditur, si formulae integrales, quae loco arearum sunt considerandae, magis fuerint complicatae. Veluti si omnes curvae per data duo puncta ducendae eiusdem longitudinis esse debeant, ita ut iam non $\int y\,dx$, sed $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ datum valorem inter abscissas $x = 0$ et $x = a$ continere debeat, tentanti mox patebit formam assumtam

$$y = X + x^m(a - x)^n P$$

parum iuvare ad idoneas functiones pro P eruendas. Quanquam enim arcus $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ simili expressione contineri debet, scilicet

$$\int \sqrt{(dx^2 + dX^2)} + x^\mu (a - x)^\nu Q \ ,$$

ita ut hoc posterius membrum pariter utroque casu $x = 0$ et $x = a$ evanescat, tamen instituto calculo ad aequationem tantopere implicatam pervenitur, ut inde nullo modo relatio inter functiones P et Q erui posse videatur. Hoc ergo incommodum ut evitetur, coordinatae x et y primum ita per alias formulas erunt exprimendae, ut inde arcus per formulam finitam expressus prodeat, id quod praestari poterit per methodum DIOPHANTEAE analogam in analysi infinitorum, cuius nuper quaedam specimina in medium attuli.

PROBLEMA 4

22. Infinitas invenire curvas per data duo puncta transeuntes, ita ut omnium arcus inter haec duo puncta comprehensi sint inter se aequales.

SOLUTIO

Positis coordinatis x et y sit arcus $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = s$; iam ut hae tres quantitates per novam variabilem formulis a signo integrali liberis exprimantur, sit $dy = p\,dx$ eritque

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$$

$$s = \int dx \sqrt{(1 + pp)} = x\sqrt{(1 + pp)} - \int \frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}} \ ;$$

ponatur $\int x\,dp = q$, $\int \frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = r$, erit

$$x = \frac{dq}{dp} = \frac{dr\sqrt{(1 + pp)}}{p\,dp} \ ,$$

unde fit

$$dr\sqrt{(1 + pp)} = p\,dq \quad \text{et} \quad p = \frac{dr}{\sqrt{(dq^2 - dr^2)}} \ ,$$

ubi r denotet functionem quamcunque ipsius q. Cum igitur sumto elemento dq constante sit

$$dp = \frac{dq^2\,d\,dr}{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

per hanc novam variabilem q coordinatae x et y cum arcu s ita exprimentur, ut sit

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr},$$

$$y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q,$$

$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} - r.$$

Sint iam f et g valores ipsius q, qui praebeant pro punctis datis abscissas nempe $x = 0$ et $x = a$, ac ponatur

$$r = Q + (f - q)^m (g - q)^n Z,$$

ubi Q sit functio data ipsius q, Z vero functio quaecunque indefinita, ita ut hac variabilitate non obstante haec formula quaestioni aeque satisfaciat, ac si esset $Z = 0$. Nunc manifestum est, si exponentes m et n fuerint binario maiores, tum utroque casu $q = f$ et $q = g$ non solum pro r, sed etiam pro $\frac{dr}{dq}$ et $\frac{ddr}{dq^2}$ eosdem prodire valores, quaecunque functio ipsius q pro Z substituatur. Hinc utroque casu $x = 0$ et $x = a$ tam applicata y quam arcus s eosdem quoque nanciscentur valores, atque idcirco omnes infinitae curvae, quae ex diversitate functionis Z nascuntur, non solum per data duo puncta transibunt, sed etiam omnium arcus inter haec duo puncta intercepti inter se erunt aequales.

ALITER

Possunt etiam aliae formulae a signo integrali liberae pro x, y et s inveniri, quae ad solutionem simpliciorem deducent. Ponatur scilicet ut ante $\int x dp = q$, ut sit $x = \frac{dq}{dp}$, hicque valor in altera formula integrali substitutus dabit:

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = \int \frac{p\,dq}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{pq}{\sqrt{(1 + pp)}} - \int \frac{q\,dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Iam ponatur $\int \frac{q\,dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}} = r$, eritque $q = \frac{dr(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, ubi r significat functionem quamcunque ipsius p. Sumto ergo dp constante erit

$$dq = \frac{ddr(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} + 3p\,dr\,\sqrt{(1 + pp)}$$

ideoque

$$x = \frac{dq}{dp} = \frac{ddr(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\,\sqrt{(1 + pp)}}{dp}.$$

Tum vero habebitur

$$y = px - q = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

et

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{3pdr(1+pp)}{dp} - \frac{pdr(1+pp)}{dp} + r\ .$$

Ergo per hanc novam variabilem p, cuius r est functio quaecunque, coordinatae x, y cum arcu s ita erunt expressae:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{pddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdr(1+pp)}{dp} + r\ .$$

Sint iam f et g valores ipsius p, qui praebent pro datis duobus punctis abscissas $x = 0$ et $x = a$, ac ponatur:

$$r = P + (f-p)^m(g-p)^n Z\ ,$$

ubi P denotet functionem ipsius p datam, Z vero indefinitam, sintque exponentes m et n binario maiores. Cum igitur, quaecunque Z sit functio, casibus $x = 0$ et $x = a$ tam pro r quam pro $\frac{dr}{dp}$ et $\frac{ddr}{dp^2}$ iidem prodeant valores, ac si esset $Z = 0$ et $r = P$, perspicuum est etiam casibus $p = f$ et $p = g$ pro x, y et s eosdem prodituros esse valores, scilicet pro x valores 0 et a. Consequenter omnes istae curvae per data duo puncta transibunt eruntque omnium arcus inter haec duo puncta intercepti eiusdem longitudinis.

COROLLARIUM 1

23. Si in solutione priore Q, in posteriori vero P sit functio algebraica atque pro Z etiam functiones algebraicae capiantur, omnes curvae inde oriundae non solum erunt algebraicae, sed etiam rectificabiles. Sin autem pro Z sumantur functiones transcendentes, ipsae curvae fient transcendentes earumque rectificatio indefinita a quapiam quadratura pendebit.

COROLLARIUM 2

24. Sin autem in solutione priori pro Q, in posteriori vero pro P eiusmodi capiantur functiones transcendentes, ut ibi $\frac{dQ}{dq}$, hic vero $\frac{dP}{dp}$ fiant func-

tiones algebraicae insuperque Z sit functio algebraica, tum curvae quidem erunt algebraicae, sed non rectificabiles.

COROLLARIUM 3

25. Duo puncta, per quae omnes curvae inveniendae transire debent, reperiuntur ex binis valoribus f et g, si ii in solutione priori pro q, in posteriori vero pro p substituantur. Unde patet eandem solutionem locum habere, ubicunque duo illa puncta assignentur.

COROLLARIUM 4

26. Assumtis autem pro lubitu his valoribus f et g, vicissim duo illa puncta omnibus curvis communia reperientur; atque, quo hoc facilius expediatur, functio Z pro nihilo habeatur, quoniam, quaecunque fuerit haec functio, eadem semper puncta reperiuntur.

COROLLARIUM 5

27. Si loco membrorum $(f—q)^m(g—q)^n Z$ in priori vel $(f—p)^m(g—p)^n Z$ in posteriori adhibeantur huiusmodi $(f-q)^m(g-q)^n(h-q)^\mu Z$ in priori vel $(f-p)^m(g-p)^n(h-p)^\mu Z$ in posteriori solutione, tum omnes curvae in formulis inventis contentae per tria data puncta A, B, C transibunt atque non solum omnes arcus AB, sed etiam omnes arcus BC ac proinde etiam AC erunt inter se longitudine aequales, dummodo exponentes singuli m, n et μ fuerint binario maiores.

COROLLARIUM 6

28. Simili modo infinitae curvae inveniri poterunt, quae per quatuor plurave puncta data transibunt et quarum omnium arcus inter bina quaeque puncta intercepti futuri sint invicem aequales.

SCHOLION

29. Formulae $(f-q)^m(g-q)^n Z$ ita debent esse comparatae, ut utroque casu $q=f$ et $q=g$ non solum ipsae in nihilum abeant, sed etiam earum differentialia prima et secunda; quod utique evenit, si exponentes m et n fuerint binario maiores. Atque si f et g sint quantitates finitae, in assumtione huiusmodi formularum nulla inest difficultas. Verum si alter valor g fiat infinitus, idem remedium erit adhibendum, quod iam supra est indicatum, scilicet tum formula ita debebit instrui

$$\frac{(f-q)^m}{\alpha+\beta q^\mu+\gamma q^\nu+\text{etc.}}Z\,,$$

ut summae potestatis in denominatore exponens maior sit quam m, hinc vero m binario maiorem esse oportet. Atque ut hoc casu conditiones problematis adimpleantur, uti Z non divisum esse debet per ullam potestatem ipsius $f-q$, ita etiam in numeratore ipsi q aequalem vel altiorem potestatem inducere non debet quam in denominatore. Nisi ergo Z sit quantitas constans, debet esse eiusmodi fractio, in cuius numeratore variabilis q non ad altiorem potestatem exsurgat, quam in denominatore. Sin autem eveniat, ut ambo valores f et g fiant infiniti, veluti $f=\infty$ et $g=-\infty$, tum manifestum est pro illo altero membro assumi posse fractionem quamcunque, in cuius denominatore variabilis q altiorem habeat potestatem quam in numeratore. Huiusmodi enim functio non solum evanescet posito $q=\infty$, sed etiam eius differentialia omnium graduum.

PROBLEMA 5

30. Data curva quacunque invenire infinitas alias, quae eam in datis duobus punctis intersecent, ita ut omnium arcus inter haec duo puncta intercepti aequales sint arcui curvae datae inter eadem puncta contento.

SOLUTIO

Pro curva data respondeat abscissae x applicata $=v$, quae ergo functioni cuipiam ipsius x aequabitur. Pro curvis inveniendis vero sit applicata abscissae x respondens $=y$ et arcus $=s$. Quoniam nunc ex praecedentis problematis solutione priore sequentes formulae

$$x=\frac{(dq^2-dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,d\,dr}\,,$$

$$y=\frac{dr(dq^2-dr^2)}{dq\,d\,dr}-q\,,$$

$$s=\frac{dq^2-dr^2}{d\,dr}-r\,,$$

si ponatur $r=Q+(f-q)^m(g-q)^nZ$, pro variis functionis Z determinationibus infinitas praebent curvas per duo puncta transeuntes arcusque inter haec puncta aequales continentes, quae duo puncta ex valoribus $q=f$ et $q=g$ definiuntur, simodo pro m et n numeri accipiantur binario maiores, tantum opus est, ut curva data in his formulis generalibus reperiatur. Efficiamus ergo, ut hae formulae casu $Z=0$ curvam datam producant et investige-

mus, qualis functio ipsius q pro Q ad hoc obtinendum substitui debeat, seu, quia hoc casu est $r = Q$, quaeramus, qualis functio r ipsius q esse debeat. Cum igitur pro curva data sit v applicata respondens abscissae x, erit filum solutionis praecedentis evolvendo

$$p = \frac{dv}{dx} \quad \text{et} \quad q = \int x\,dp = px - v$$

ideoque $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, ex qua aequatione valor ipsius x per q definitur; deinde est

$$r = \int \frac{x\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = x\sqrt{(1+pp)} - \int dx\sqrt{(1+pp)}$$

seu

$$r = \frac{x\sqrt{(dx^2+dv^2)}}{dx} - \int \sqrt{(dx^2+dv^2)}\,,$$

unde fit, si elementum dx constans accipiatur,

$$dr = \frac{x\,dv\,d\,dv}{dx\sqrt{(dx^2+dv^2)}}\,;$$

atque si hic pro x substituatur eius valor per q iam inventus, apparebit, qualis functio ipsius q sit r, quae deinceps pro Q scribi debet. Ambo autem puncta data in curva proposita reperientur ponendo $q = f$ et $q = g$, unde vicissim ex datis punctis valores litterarum f et g elicientur. Quibus definitis si pro Q scribatur ille valor pro r inventus ac per q expressus, pro Z autem functiones quaecunque ipsius q substituantur, infinitae prodibunt lineae curvae per eadem duo puncta transeuntes et inter ea pares cum curva proposita arcus interceptos habentes.

ALITER

Si alteram solutionem generalem problematis superioris in subsidium vocemus, quae pro curvis quaesitis sequentes suppeditaverat formulas

$$x = \frac{d\,dr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{p\,d\,dr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{d\,dr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2p\,dr(1+pp)}{dp} + r$$

ponendo $r = P + (f-p)^m(g-p)^n Z$, existentibus m et n numeris binario maioribus: efficiendum est, ut hae formulae casu $Z = 0$ curvam propositam

exhibeant. Cum igitur hoc casu sit $p = \frac{dv}{dx}$, hinc valor ipsius x per p definiatur. Deinde ob $q = \int x\,dp = px - v$ erit

$$q = \frac{x\,dv}{dx} - v \quad \text{et} \quad r = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

quodsi ergo in q loco x valor eius per p inventus substituatur, habebitur pro r functio ipsius p, quae curvam propositam producit. Haec iam functio ipsius p pro r inventa loco P scribatur, ita ut sit

$$P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

et quaecunque functiones litterae Z tribuantur, semper eiusmodi valores habebuntur pro

$$r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z,$$

quae infinitas praebebunt curvas datam in duobus punctis fixis intersecantes et cum data inter haec duo puncta aequales arcus interceptos habentes. Quomodo autem, si illa puncta pro lubitu dentur, inde valores debiti pro f et g sint eruendi, ante est expositum.

COROLLARIUM 1

31. Cum in solutione priore sit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, erit $dq = \frac{x\,d\,dv}{dx}$, hinc, cum Q aequalis sit valori ipsius r inde orto, erit

$$Q = \int \frac{dv\,dq}{\sqrt{(dx^2+dv^2)}}.$$

At ob $dv = \frac{(q+v)\,dx}{x}$ erit quoque

$$Q = \int \frac{(q+v)\,dq}{\sqrt{(xx+(q+v)^2)}},$$

ubi tantum opus est, ut pro x et v valores ex aequatione $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$ per q expressi substituantur; hocque modo pro Q obtinebitur debita functio ipsius q in formulis substituenda.

COROLLARIUM 2

32. Pro solutione altera valor ipsius x per p quaeri debet ex hac aequatione $p = \frac{dv}{dx}$; unde simul ob aequationem inter v et x datam elicitur valor

ipsius v itidem per p expressus. Tum vero elabitur quoque $q = px - v$ per p ideoque etiam functio quaesita

$$P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(px - v)\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

COROLLARIUM 3

33. Si linea proposita esset recta, foret in solutione priori q, in posteriori vero p quantitas constans, hincque etiam ibi Q, hic vero P quantitates constantes. Quia ergo hoc casu x, y et s per p definire non licet, manifestum est solutionem non succedere. Hoc autem per se est perspicuum, quia linea recta est brevissima intra suos terminos neque propterea inter eosdem terminos lineae curvae rectae aequales exhiberi possunt.

EXEMPLUM

34. Sit curva data circulus hac aequatione expressus: $v = \sqrt{(aa - xx)}$, erit

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

et pro solutione priori

$$q = -\frac{xx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \sqrt{(aa - xx)} = -\frac{aa}{\sqrt{(aa - xx)}}.$$

Hinc $x = \frac{a\sqrt{(qq - aa)}}{q}$ et $v = -\frac{aa}{q}$. Unde reperitur

$$Q = \int \frac{(qq - aa)\,dq}{\sqrt{(aa(qq - aa) + (qq - aa)^2)}} \quad \text{sive} \quad Q = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq - aa)}.$$

Quare si statuatur

$$r = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq - aa)} + (f - q)^m (g - q)^n Z,$$

existentibus m et n numeris binario maioribus, quaecunque functio ipsius q pro Z ponatur, sequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,d\,dr} \quad \text{et} \quad y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,d\,dr} - q$$

infinitas exhibebunt lineas curvas circulum in duobus punctis secantes, quarum omnium arcus inter haec puncta contenti ipsi arcui circulari futuri sint aequales. Haec autem duo puncta in circulo definientur ex abscissis

$$x = \frac{a\sqrt{(ff - aa)}}{f} \quad \text{et} \quad x = \frac{a\sqrt{(gg - aa)}}{g} .$$

Vicissim autem, si hae abscissae dentur, erit f vel $g = -\frac{aa}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

Pro altera solutione erit $p = -\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ideoque

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} \quad \text{et} \quad v = -\frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}} .$$

Unde fit $q = px - v = a\sqrt{(1 + pp)}$, ita ut functio quaesita P hinc prodeat

$$P = \int \frac{adp}{1 + pp} \quad \text{atque} \quad r = \int \frac{adp}{1 + pp} + (f - p)^m (g - p)^n Z ,$$

et ambo puncta respondebunt abscissis

$$x = \frac{af}{\sqrt{(1 + ff)}} \quad \text{et} \quad x = \frac{ag}{\sqrt{(1 + gg)}} ;$$

vel ex datis his abscissis litterae f et g elicientur ex aequatione

$$p = -\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}} .$$

Sit brevitatis gratia $(f - p)^m (g - p)^n Z = V$, ut sit $r = \int \frac{a\,dp}{1 + pp} + V$, erit

$$\frac{dr}{dp} = \frac{a}{1 + pp} + \frac{dV}{dp} \quad \text{et} \quad \frac{ddr}{dp^2} = -\frac{2ap}{(1 + pp)^2} + \frac{ddV}{dp^2} .$$

Omnes ergo curvae quaesitae his formulis continebuntur

$$x = -\frac{2ap}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{3ap}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{ddV(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1 + pp)}}{dp}$$

$$y = -\frac{2app}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{a(2pp - 1)}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{pddV(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp - 1)dV\sqrt{(1 + pp)}}{dp}$$

$$s = -2ap + 2ap + \int \frac{adp}{1 + pp} + \frac{ddV(1 + pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1 + pp)}{dp} + V.$$

sive

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{ddV(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1 + pp)}}{dp}$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{pddV(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp - 1)dV\sqrt{(1 + pp)}}{dp}$$

$$s = \int \frac{adp}{1 + pp} + \frac{ddV(1 + pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1 + pp)}{dp} + V .$$

SCHOLION

35. Pro altera hac solutione si valor ipsius p ad alterutrum punctum datum relatus est infinitus, quo casu pro V huiusmodi valorem

$$\frac{(f-p)^m Z}{\alpha + \beta p^\mu + \gamma p^\nu + \text{etc.}}$$

accipi oportere vidimus, ut maxima potestas ipsius p in denominatore maior sit, quam eius maxima potestas in numeratore, sequentem observationem adiici convenit, quae non solum in hoc exemplo, sed in genere etiam est tenenda. Primo, quae hactenus de hoc casu sunt tradita, huc redeunt, ut pro V assumi debeat huiusmodi fractio, cuius numerator factorem habeat $(f-p)^m$ exponente m excedente binarium. Deinde vero requiritur, ut maxima potestas ipsius p in denominatore superet maximam eius potestatem in numeratore. Verum, etsi hoc modo casu $p=\infty$ non solum ipsa quantitas V, sed etiam $\frac{dV}{dp}$ et $\frac{ddV}{dp^2}$ evanescunt, tamen ad functiones ipsius p, per quas hae quantitates in nostris formulis sunt multiplicatae, spectari debent, ne ob eas haec evanescentia tollatur. Quae circumstantia ut probe observetur, ponamus in ea fractione, quae pro V assumitur, μ esse exponentem maximae potestatis ipsius p in numeratore, in denominatore vero esse $\mu+\nu$ exponentem maximae potestatis ipsius p. Iam casu $p=\infty$, quo inferiores ipsius p potestates omnes prae maxima evanescunt, erit

$$\text{valor ipsius } V = \frac{A}{p^\nu}, \quad \text{ipsius } \frac{dV}{dp} = \frac{B}{p^{\nu+1}} \quad \text{et ipsius } \frac{ddV}{dp^2} = \frac{C}{p^{\nu+2}},$$

qui utique hoc casu $p=\infty$ evanescunt. Sed quoniam in nostris formulis $\frac{dV}{dp}$ per $(2pp-1)\sqrt{(1+pp)}$ et per $p(1+pp)$, hoc est casu $p=\infty$ per p^3, reperitur multiplicatum ac $\frac{ddV}{dp^2}$ per $p(1+pp)^{\frac{3}{2}}$ et $(1+pp)^2$, hoc est per p^4, necesse est, ut posito $p=\infty$ etiam

$$\frac{p^3 dV}{dp} = \frac{Bp^2}{p^\nu} \quad \text{et} \quad \frac{p^4 ddV}{dp^2} = \frac{Cp^2}{p^\nu}$$

evanescant. Unde manifestum est exponentem ν binario maiorem esse debere. Hinc ergo concludimus: si duo puncta data respondeant valoribus $p=f$ et $p=\infty$, pro V assumi debere huiusmodi fractionem, cuius numerator primo factorem habeat $(f-p)^m$, in quo exponens m sit binario maior, deinde maxima potestas ipsius p in denominatore non solum maior esse debet quam

in numeratore, sed etiam excessus maior esse debet, quam quadratum p^2; ita ut, si μ sit exponens maximae potestatis in numeratore, maximae potestatis in denominatore exponens maior esse debeat quam $\mu + 2$. Simili modo si ambo puncta data conveniant valoribus $p = +\infty$ et $p = -\infty$, pro V quoque eiusmodi fractio assumi debebit, cuius denominator ultra quadratum maiores contineat potestates ipsius p quam numerator. His igitur notatis exempli propositi sequentes evolvamus casus praecipuos.

CASUS I

36. *Dato circuli quadrante infinitas assignare curvas per eius terminos transeuntes, ita ut singularum arcus intra hos terminos comprehensi aequales sint arcui quadrantis.*

Posito radio quadrantis $= a$, ut sit $v = \sqrt{(aa - xx)}$, termini quadrantis respondebunt abscissis $x = 0$ et $x = a$. Cum iam sit $p = -\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, valores ipsius p erunt pro illo termino $p = 0$, pro hoc vero $p = \infty$, erit ergo $f = 0$; ideoque pro V eiusmodi assumi debet functio fracta, cuius numerator factorem habeat p, existente exponente m binario maiore, denominatoris vero maxima potestas ipsius p supra quadratum excedat maximam potestatem in numeratore. Quibus praeceptis observatis formulae ante datae omnes curvas quaestioni satisfacientes exhibebunt. Ex quibus ut simpliciores eliciamus, ponamus $V = \frac{bp^3}{(1 + pp)^3}$, sic enim exponens maximae potestatis in denominatore ternario superat numeratorem. Erit ergo

$$\frac{dV}{dp} = \frac{3b(pp - p^4)}{(1 + pp)^4} \quad \text{et} \quad \frac{ddV}{dp^2} = \frac{6b(p - 5p^3 + 2p^5)}{(1 + pp)^5},$$

qui valores in formulis nostris substituti dabunt

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{3bp(2 - 7pp + p^4)}{(1 + pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{3bpp(1 - 7pp + 2p^4)}{(1 + pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1 + pp} + \frac{bp(6 - 23pp + 6p^4)}{(1 + pp)^3}.$$

ALITER

Obtinetur etiam arcus 90°, si termini constituantur $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, unde fit $p = -1$ et $p = +1$, ita ut pro his terminis sit $f = -1$ et

$g = +1$. Quare V eiusmodi esse debet functio ipsius p, quae factorem habeat $(1+p)^m(1-p)^n$, existentibus exponentibus m et n binario maioribus. Hincque posito

$$V = (1+p)^m(1-p)^n Z$$

formulae superiores omnes praebebunt curvas quaesito satisfacientes. Simpliciores ergo prodibunt ponendo

$$V = b(1-pp)^3 \quad \text{vel} \quad V = \frac{b(1-pp)^5}{1+pp}.$$

Alio praeterea modo, idque generaliter, termini ambo ita definientur, ut inter eos arcus 90° contineatur, si ponatur pro altero $\frac{x}{a} = \sin \Phi$, pro altero vero $\frac{x}{a} = -\cos \Phi$. Cum igitur pro illo sit

$$\sqrt{(aa - xx)} = a \cos \Phi,$$

pro hoc vero

$$\sqrt{(aa - xx)} = a \sin \Phi$$

erunt ipsius p valores alter $p = -\operatorname{tang} \Phi$ alter $p = +\cot \Phi$, sicque erit

$$f = -\operatorname{tang} \Phi \quad \text{et} \quad g = \cot \Phi:$$

unde valor ipsius V erit

$$V = (\operatorname{tang} \Phi + p)^m(\cot \Phi - p)^n Z,$$

ac si $m = n > 2$, posito $\cot \Phi - \operatorname{tang} \Phi = \alpha$ erit

$$V = (1 + \alpha p - pp)^m Z.$$

CASUS 2

37. *Data semicircumferentia circuli invenire infinitas alias curvas illi aequales atque intra ipsius terminos existentes.*

Posito circuli radio $= a$, ut sit $v = \sqrt{(aa - xx)}$, termini circumferentiae, quia in diametri extremitatibus sunt siti, orientur ex valoribus abscissae $x = a$ et $x = -a$; hinc autem ipsius p valores prodibunt $f = -\infty$ et $g = \infty$. Hinc, uti ante notavimus, functio V eiusmodi debet esse fractio, in cuius denominatore exponens maximae potestatis ipsius p plus quam binario superet exponentem maximae potestatis in numeratore, haecque sola conditio sufficiet pro casu proposito. Casus ergo simpliciores prodibunt ponendo

$$V = \frac{b}{p(1+pp)} \quad \text{vel} \quad V = \frac{b+cp}{(1+pp)^2}.$$

Notandum autem hic est formam $\frac{b}{p(1+pp)}$ non convenire, quoniam ex ea

coordinatae x et y in infinitum essent abiturae casu $p = 0$, ita ut curvae intra datos terminos in infinitum excurrent; quare pro V eiusmodi formulas accipi oportet, ut nullo casu vel ipsa formula V vel eius differentialia in infinitum abeant. Sit ergo

$$V = \frac{b + cp}{(1 + pp)^2},$$

eritque

$$\frac{dV}{dp} = \frac{-4bp + c(1 - 3pp)}{(1 + pp)^3}$$

$$\frac{ddV}{dp^2} = \frac{-b(4 - 20pp) - c(12p - 12p^3)}{(1 + pp)^4}$$

hincque pro constructione curvarum sequentes obtinebuntur formulae:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{4b(1 - 2pp) + 3cp(3 - pp)}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{12bp^3 - c(1 + 7pp - 6p^4)}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1 + pp} - \frac{3b(1 - 4pp) + 3cp(3 - 2pp)}{(1 + pp)^2}.$$

Omnes hae curvae etiam diametro normaliter insistent, atque si sit $b = 0$, earum applicatae maximae in centrum circuli cadent, quia posito $p = 0$ fit $x = 0$; applicata autem maxima erit $= a + c$, atque ad utramque partem curvae erunt sibi similes. Hae ergo curvae prae ceteris notatu dignae ex his formulis construentur:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{3cp(3 - pp)}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{c(1 + 7pp - 6p^4)}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}},$$

unde erit

$$s = \int \frac{adp}{1 + pp} - \frac{3cp(3 - 2pp)}{(1 + pp)^2}.$$

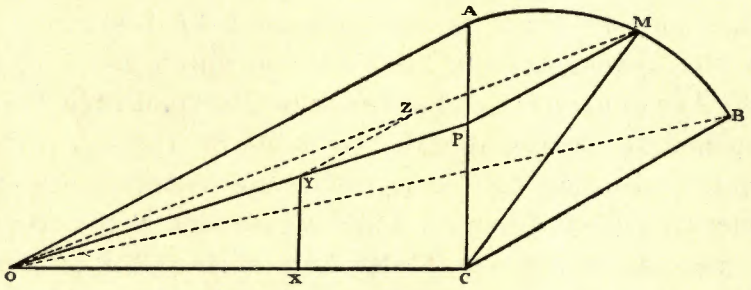
Hinc porro intelligitur capi debere $c < \frac{1}{6}a$; si enim esset $c > \frac{1}{6}a$, tum sumto p valde parvo arcus s prodiret negativus arcusque idcirco alicubi negativos valores nanciscerentur, contra naturam quaestionis. Perspicuum enim est, si applicata media et maxima $a + c$ certum terminum transgrediatur, fieri plane non posse, ut curva uno tractu procedens semicircumferentiae circuli esset aequalis. Pro c interim quantitates infinitae, tam affirmativae quam negativae, accipi possunt, dummodo satis sint parvae et quidem minores quam $\frac{1}{6}a$.

ALBRECHT EULERS AUFLÖSUNG EINER GEOMETRISCHEN AUFGABE

Commentatio A 10 indicis ENESTROEMIANI
Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften Bd. 2_2 (1764) p. 37—60

Die Aufgabe, welche ich mir hier aufzulösen vorgenommen habe, lautet folgendergestalt:

Die Höhe eines Kegels ist gegeben: man soll die Figur seiner Grundfläche finden, so daß der körperliche Innhalt desselben, unter allen andern, die mit ihm gleiche Oberflächen haben, der größte sey?



1. Es sey a die gegebene Höhe des Kegels; man ziehe aus der Spitze desselben O auf die Grundfläche CAB die Perpendicularlinie CO, welche also $= a$ seyn wird. Man suche nun die Figur dieser Grundfläche, so daß der Kegel eine gegebene Oberfläche erhalte, und da dieses auf unendlich viel Arten geschehen kann, so soll unter allen diesen Grundflächen diejenige bestimmt werden, welche den größten körperlichen Innhalt giebt. Man kann auch diese Aufgabe also umkehren, daß unter allen Grundflächen, welche Kegel von einem gegebenen körperlichen Innhalt geben, diejenige verlangt werde, so der kleinsten Oberfläche zukömmt. Die Aufgabe aber mag auf diese oder jene Art vorgetragen werden, so bleibt die Auflösung dennoch die nämliche. Eben diejenige Gleichheit, welche uns die Natur einer Grundfläche ausdruckt, so unter allen Kegeln von gleicher Oberfläche demjenigen zukömmt, der den größten körperlichen Innhalt hat, wird auch zugleich diejenige Grundfläche anzeigen, welche unter allen Kegeln einerley Innhalts demjenigen zukömmt, dessen Oberfläche am kleinsten ist.

Ob nun gleich die Lehre von den *Maximis* und *Minimis* auf das vollständigste ausgearbeitet worden, so daß die gegenwärtige Aufgabe von keiner Schwierigkeit zu seyn mehr scheinet, so wird dennoch ein jeder, der die Auflösung derselben unternehmen wollte, so große Hindernisse finden, daß er, um dieselben aus dem Wege zu räumen, die feinsten Kunstgriffe der Analyse zu Hülfe zu nehmen gezwungen wird. Ich glaube also nicht eine vergebliche Arbeit unternommen zu haben, wenn ich hiermit die Auflösung der vorgelegten Aufgabe in so fern zu Ende zu bringen trachte, als es theils die Natur derselben Aufgabe, theils auch meine Kräfte erlauben wollen. Schwere Aufgaben pflegen niemals ohne Nutzen abgehandelt zu werden, und man verfällt gemeiniglich durch die Auflösung derselben auf Dinge, so zur Erweiterung der Analyse nicht wenig beytragen. Unser Verstand wird dabey geschärft, und je länger je mehr tüchtig gemacht, auch schwerere Untersuchungen unternehmen zu können.

2. Da hier also die Figur der Grundfläche CAB bestimmet werden soll, so lasset uns eine gewisse gerade Linie CA, so durch den Punct C gezogen worden, für die Axe annehmen, und auf dieselbe die Applicaten PM senkelrecht ziehen. Man nenne die Coordinaten der Grundfläche $CP = x$, $PM = y$ und setze $dy = pdx$, also daß die ganze Auflösung darinnen bestehe, daß eine Verhältniß oder Gleichheit zwischen x und y gefunden werde. Durch die Coordinaten wird man also zuerst sowohl den körperlichen Innhalt des Kegels, als auch seine Oberfläche bestimmen müssen. Und obgleich dieselben aus der Natur der kegelförmigen Körper leicht hergeleitet werden kann, so wird es hier dannoch besser seyn, sich der allgemeinen Formuln, welche nämlich allen Körpern gemein sind, zu bedienen: damit man hernach die Rechnung desto leichter, und auf eine ähnliche Art, auf die andere Gattungen der Körper anwenden könne.

3. Laßt uns zu diesem Ende erstlich eine Gleichheit suchen, welche die Natur eines Kegels auf die gewöhnliche Art durch drey auf einander senkelrechte Coordinaten ausdrückt. Nachdem also aus der Spitze O eine grade Linie MO gezogen worden, welche gänzlich auf der Oberfläche des Kegels liegt, so ziehe man aus einem unbestimmten Punct Z in derselben erstlich die Linie ZY, welche auf der Fläche OCA senkelrecht auffällt, und dann wiederum von dem Puncte X die auf die Axe des Kegels OC senkelrechte Linie XY; hernach nehme man diese drey geraden Linien OX, XY und ZY für die Coordinaten an, und setze $OX = X$, $XY = Y$ und $YZ = Z$. Da nun wegen der Ähnlich-

keit der drey Ecke OCP und OXY, imgleichen OPM und OYZ sich verhält $a : X = x : Y = y : Z$, so wird $Y = \frac{xX}{a}$ und $Z = \frac{yX}{a}$, und folglich, wenn diese Formuln differentiiret werden und für dy pdx geschrieben wird, so erhält man $dY = \frac{x\,dX + X dx}{a}$ und $dZ = \frac{y dX + pX dx}{a}$.

4. Nun wissen wir durch die allgemeinen Formuln, welche zur Natur eines jeden Körpers überhaupt gehören, daß, wenn $dZ = P dX + Q dY$ gesetzt wird, der körperliche Innhalt desselben seyn werde $= \int\int Z dX dY$ und die Oberfläche $= \int\int dX dY \sqrt{(1 + PP + QQ)}$. Wenn wir also diese Ausdrücke auf den gegenwärtigen Fall anwenden wollen, so müssen wir zuerst die Werthe von P und Q suchen. Wir müssen also aus denen für dY und dZ gefundenen Formuln das Differentiale dx heraus bringen, dadurch wir dann erlangen werden $pdY - dZ = \frac{(px - y)\,dX}{a}$, also daß $dZ = pdY + \frac{(y - px)\,dX}{a}$ und folglich $P = \frac{y - px}{a}$, $Q = p$ und hieraus wiederum

$$\sqrt{(1 + PP + QQ)} = \frac{1}{a}\sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}\,.$$

5. Wir werden also folgende Ausdrücke, welche zu unserm Vorhaben eingerichtet sind, erlangen. Nämlich der körperliche Innhalt des Kegels

$$= \frac{1}{aa}\int\int y X dX (x dX + X dx)$$

und die Oberfläche desselben

$$= \frac{1}{aa}\int\int dX\,(x dX + X dx)\sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}\,.$$

Diese gedoppelte Differentialformuln müssen zweymal nacheinander integriret werden, indem man nämlich die beyde Größen x und X, welche darinn enthalten sind, eine nach der andern, als veränderlich betrachtet. Denn hier werden y und p als zwey gegebene Functionen von x angesehen, weil bei der gegenwärtigen Untersuchung die Grundfläche als bekannt angenommen wird, also daß unsere Formuln eigentlich nur die zwey veränderlichen Größen x und X in sich enthalten, welche sonsten miteinander nicht die geringste Gemeinschaft haben.

6. Es muß aber diese zweyfache Integration beyder Formuln also verrichtet werden, daß erstlich nur eine der beyden veränderlichen Größen x und X als veränderlich betrachtet, und die Integration darauf bis auf den

ganzen Körper ausgedehnet, hernach aber auch die andere der beyden Größen als veränderlich angenommen, und die Integration auf eine ähnliche Art vollzogen werde. Es ist aber einerley, mit welcher veränderlichen Größe wir die Integration anfangen, da es allezeit nothwendig ist, daß ein und eben derselbe Werth herauskomme. Damit man dieses deutlich einsehe, sintemal dergleichen Rechnungen selten vorkommen, so wollen wir uns hier beyder Arten nacheinander bedienen, also daß wegen ihrer Übereinstimmung kein Zweifel mehr übrig bleiben könne.

7. Es sey also bei der ersteren Integration nur allein x mit seinen Functionen y und p veränderlich, und unsere Formuln werden folgendermaßen können angedeutet werden, nämlich

$$\text{der körperliche Innhalt } = \frac{1}{aa}\int dX \int dx \left(\frac{xyXdX}{dx} + yXX\right),$$

$$\text{die Oberfläche } = \frac{1}{aa}\int dX \int dx \left(\frac{xdX}{dx} + X\right)\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}.$$

Da nun die hinteren Theile dieser Formuln zuerst integrirt werden müssen, und dabey X als eine beständige Größe betrachtet wird, folglich $dX = 0$, so werden dieselben folgender Gestalten erhalten

$$\int yXXdx \quad \text{und} \quad \int Xdx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)},$$

da ferner diese Integration durch die ganze Grundfläche ausgebreitet worden, so laßt uns setzen, weil X eine beständige Größe ist, man hätte erhalten

$$\int ydx = A \quad \text{und} \quad \int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)} = B,$$

denn die Werthe dieser Formuln werden gewiß beständig seyn.

8. Wir werden also hieraus bekommen: erstlich den körperlichen Raum $= \frac{A}{aa}\int XXdX$ und zweytens die Oberfläche $= \frac{B}{aa}\int XdX$, da nun nach der zweyten Integration die veränderliche Größe X auf der Axe von der Spitze O, wo $X = 0$ ist, angerechnet, bis zum andern Ende derselben C, wo $X = a$ wird, ausgedehnt werden muß, so wird

$$\int XXdX = \tfrac{1}{3}X^3 = \tfrac{1}{3}a^3 \quad \text{und} \quad \int XdX = \tfrac{1}{2}X^2 = \tfrac{1}{2}a^2,$$

folglich der körperliche Raum $= \frac{1}{3}Aa$ und die Oberfläche des Kegels $= \frac{1}{2}B$, welche also beyde durch die Figur der Grundfläche dergestalt bestimmt werden, daß da sey der körperliche Raum $= \frac{1}{3}a\int ydx$ und die Oberfläche

$$= \tfrac{1}{2}\int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)},$$

wenn nämlich diese Integralien durch die ganze Grundfläche ausgebreitet werden.

9. Noch ehe ich weiter gehe, so wird es dienlich seyn eine sonderbare Beschaffenheit und Eigenschaft dieser Rechnung genauer zu untersuchen. Wir sehen nämlich bey unsren gedoppelten Integralformuln

$$\int\int yX(xdX^2 + Xdxd X)$$

und

$$\int\int (xdX^2 + Xdxd X)\sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}\,,$$

daß diejenigen Glieder, welche mit dem Quadrat des Differentialis dX^2 verbunden sind, gar nicht in Betrachtung gekommen sind, und daß eben diejenigen Werthe, welche wir eben erhalten haben, auch entsprungen würden seyn, wenn wir gleich anfänglich diese Glieder weggelassen und die Formuln folgendergestalt geändert hätten. Nämlich daß da wäre der körperliche Innhalt des Kegels $= \frac{1}{aa}\int\int yXXdxdX$ und die Oberfläche desselben

$$\frac{1}{aa}\int\int XdxdX\sqrt{(aa(1+pp) + (y-px)^2)}\,.$$

Hier stellt sich also unvermuthet eine neue Art dar, dergleichen gedoppelte Integralformuln weit leichter auszudrücken.

10. Die Ursache aber, warum in solchen Formuln allezeit diejenigen Glieder, welche durch das Quadrat seines Differentialis vermehret sind, weggeworfen werden können, ist nicht schwer zu ergründen. Denn da die Entwickelung derselben Formuln eine zweyfache Integration erfordert, deren die eine nur allein durch die Veränderlichkeit der Größe x, die andere aber nur allein durch die Veränderlichkeit der zweyten Größe X verrichtet wird: so ist offenbar, daß die erste Integration nur in sofern die Glieder mit dX, und die zweyte Integration, in sofern dieselben mit dx vermehret sind, statt findet: folglich wird man die gedoppelte Integration nur alsdann unternehmen können, wenn alle Glieder der Formul mit beyden Differentialien dX und dx zugleich, das ist, mit ihrem Produckt $dX \cdot dx$ vermehret sind.

Wenn demnach einige Glieder vorkommen, welche nur mit einem der beyden Differentialien mit sich selber vermehret, das ist, entweder mit dX^2 oder dx^2 verbunden sind, so sind dieselben zu einer dergleichen gedoppelten Integration völlig untüchtig. Denn ob sie gleich eine Integration zulassen, welche nämlich durch dasjenige Differentiale verrichtet wird, so dieselben Glieder gedoppelt in sich enthält, so kann dennoch die zweyte Integration

nicht statt haben; diese Glieder müssen also als nichts bedeutende angesehen werden, so daß man dieselben gänzlich aus der Rechnung auslassen kann.

11. Überhaupt, wenn eine dergleichen gedoppelte Integralformul vorkömmt, als $\int\int (PdX^2 + QdxdX + RdX^2)$, welche zwey veränderliche Größen X und x in sich enthält, und in der ersteren Integration nur die eine veränderliche Größe X, in der letztern aber nur die andere x als veränderlich betrachtet werden soll, so kann man sogleich diejenigen Glieder derselben PdX^2 und Rdx^2, welche mit dem Quadrat der Differentialen verbunden sind, weglassen, also daß nur diese Formul $\int\int QdxdX$ zu integriren übrig bleibt, und welche man eben sowohl durch $\int dx \int QdX$ als durch $\int dX \int Qdx$ andeuten kann. Man wird sich nämlich des ersten Ausdrucks bedienen müssen, wenn zuerst nur allein X, hernach aber x als veränderlich betrachtet wird; der zweite Ausdruck aber wird statt finden, wenn die beyden Integrationen nach einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden.

12. Nachdem nun dieser allgemeine Lehrsatz bewiesen worden, so lasset uns unsere Formuln, welche wir schon oben § 9 nach derjenigen Ordnung entwickelt haben, nach welcher der körperliche Raum $= \frac{1}{aa} \int dX \int yXXdx$

und die Oberfläche $= \frac{1}{aa} \int dX \int Xdx \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$

ist, anjetzo nach der verkehrten Ordnung der beyden veränderlichen Größen x und X auseinander setzen, so daß wir nun den körperlichen Raum

$$= \frac{1}{aa} \int dx \int yXXdX$$

und die Oberfläche $= \frac{1}{aa} \int dx \int XdX \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$

erhalten. Es ist eben das Integrale der Formul $\int yXXdX$, weil hier y, in sofern dieselbe eine Function von x ist, als beständig betrachtet wird $= \frac{1}{3} yX^3$, und folglich wenn dieses Integrale durch die ganze Höhe a ausgebreitet wird, so ist $\int yXXdX = \frac{1}{3} a^3 y$. Auf eine ähnliche Art wird in der zweyten Formul, weil bey der ersten Integration $\sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$ einerley bleibt, oder beständig ist, seyn

$$\int XdX \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)} = \tfrac{1}{2} XX \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2} aa \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$$

13. Wir erhalten also durch die erste Integration den körperlichen Raum des Kegels $= \frac{1}{3}a \int y dx$ und desselben Oberfläche

$$= \tfrac{1}{2} \int dx \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)} .$$

Welche jetzt nur noch einmal integriret werden müssen, und zwar also, daß die Größe x mit ihren Functionen y und p veränderlich genommen werden. Die Integration dieser Formuln geht nämlich nur allein auf die Grundfläche des Kegels, und muß auch auf dieselbe ganz ausgebreitet werden.

Und auf diese Weise werden wir den körperlichen Raum sowohl als auch die Oberfläche vollkommen so heraus bringen, als wir dieselben schon oben § 8 durch die erste Art gefunden haben. Man sieht auch zugleich aus dieser Übereinstimmung die Nothwendigkeit ab, warum bey dergleichen gedoppelten Integralformuln beyde Gattungen, dieselben zu integriren, beständig auf eine und eben dieselbe Werthe leiten müssen.

14. Nunmehro ist also gegenwärtige Frage nur allein auf die Figur der Grundfläche gebracht worden, und dieselbe kann derohalben in diesen Worten eingekleidet werden, daß unter allen Figuren, oder unter allen krummen Linien AMB, welche einen und eben denselben Werth für die Formul $\int y dx$ geben, das ist, welche eine gleich große Fläche einschließen, diejenige bestimmet werde, in welcher der Werth dieser andern Formul

$$\int dx \sqrt{(aa(1+pp) + (y - px)^2)}$$

ein Minimum oder am kleinsten sey, Um nun diese Frage aufzulösen, so nehme ich für bewiesen an, daß erstlich der Differentialwerth, oder wie man dieselben sonsten zu nennen pfleget, die Variationen der beyden gezeigten Formuln gesucht, und denn zweytens die Variation der erstern einem Multiplo der Variation des andern gleich gesetzt werden muß.

Wenn wir also diese Differentialwerthe oder Variationen durch den Buchstaben δ, der der Formul vorgesetzt wird, andeuten, so werden wir für die verlangte Figur der Grundfläche diese Gleichheit erhalten

$$\alpha \delta \int y dx = \delta \int dx \sqrt{(a^2(1+pp) + (y - px)^2)} .$$

15. Da nun die ganze Auflösung auf der einzigen Bestimmung dieser Variationen beruhet, so laßt uns aus der Lehre der Maximorum und Minimorum diese allgemeine Formul $\int Z dx$ betrachten, in welcher Z eine jegliche Function beydes der veränderlichen Größen x und y als auch ihrer Differentialien, oder, wenn $dy = p dx$ gesetzt wird, der Größe p andeutet: also daß

diese Form $\int Z dx$ unsere beyde Formuln in sich begreift. Weil demnach Z eine Function der drey endlichen Größen x, y und p ist, so wird das Differentiale derselben folgende Gestalt haben $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, und wo die Größen M, N und P in einem jeglichen Fall leicht erhalten werden. Wenn nun dieselben gefunden worden, so ist aus der Lehre der Maximorum und Minimorum bekannt, daß die Variation der Formul $\int Z dx$, oder sein Differentialwerth sich verhalte wie $N - \frac{dP}{dx}$.

16. Dieses voraus gesetzt, so wird für unsre erstere Formul $\int y dx$ (weil hier $Z = y$) $M = 0$, $N = 1$ und $P = 0$ seyn; folglich der Differentialwerth derselben, wie 1.

Für unsere zweyte Formul $\int dx \sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}$, aber weil hier $Z = \sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}$, so wird

$$M = -\frac{p(y - px)}{Z}, \quad N = \frac{y - px}{Z} \quad \text{und} \quad P = \frac{aap - x(y - px)}{Z}.$$

Wenn wir also der Kürze halben diese Buchstaben Z, M, N, P anstatt der gefundenen und weitläufigen Werthe derselben beybehalten, so wird der Differentialwerth unsern zweyten Formul sich wie $N - \frac{dP}{dx}$ verhalten; wobey zu merken, daß da sey $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$; folglich werden wir für die Figur der Grundfläche des Kegels diese Gleichheit erhalten $m = N - \frac{dP}{dx}$, wo m eine nach Belieben angenommene Zahl andeutet. Die ganze Arbeit lauft also darauf hinaus, daß die gehörigen Werthe für N, P und Z in dieser Gleichheit $m = N - \frac{dP}{dx}$ eingeführet, und dieselben hernach entwickelt, und also auseinander gesetzt werde, daß dadurch die gesuchte Figur der Fläche erkannt und verzeichnet werden kann. Da aber P die Größe $p = \frac{dy}{dx}$ und unsere Gleichheit hinwiederum dP in sich begreift, so erhellet, daß dieselbe eine Differentialgleichheit von der zweyten Ordnung seyn müsse, und folglich eine doppelte Integration erfordere.

17. Wenn wir aber die Glieder unserer gedoppelten Differentialgleichung genauer erwägen, so werden wir finden, daß da sey $M = -Np$, und folglich, weil $dy = pdx$, $Mdx + Ndy = 0$, also ist $dZ = Pdp$, oder da

$$P = \frac{aap - x(y - px)}{Z},$$

so wird

$$dZ = \frac{aap - x(y - px)}{Z} dp.$$

Ferner, wenn wir den Werth von P differentiiren, so werden wir bekommen

$$dP = \frac{aadp - dx(y - px) + xxdp}{Z} - \frac{(aap - x(y - px))dZ}{ZZ}$$

und also, wenn wir hier den eben gefundenen Werth für dZ schreiben,

$$dP = \frac{(aa + xx)dp - dx(y - px)}{Z} - \frac{(aap - x(y - px))^2 dp}{Z^3}$$

folglich wird unsere Gleichheit $m = N - \frac{dP}{dx}$, weil $N = \frac{y - px}{Z}$ ist, in diese Form übergehen

$$mdx = \frac{2(y - px)dx}{Z} - \frac{(aa + xx)dp}{Z} + \frac{(aap - x(y - px))^2 dp}{Z^3},$$

wo $Z = \sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}$ ist.

18. Die zwey letztern Glieder der Gleichheit können auf diese Art in eines gebracht werden

$$\frac{dp}{Z^3}((aap - x(y - px))^2 - (aa + xx)(aa(1 + pp) + (y - px)^2))$$

und welches durch die Entwicklung in das folgende verwandelt wird

$$-\frac{aadp}{Z^3}(aa + xx + yy).$$

Unsere Gleichheit wird also hierdurch eine weit kürzere Gestalt bekommen, sie wird nämlich seyn

$$mdx = \frac{2(y - px)dx}{Z} - \frac{aa(aa + xx + yy)dp}{Z^3}.$$

Wie dieselbe aber integriret werden kann, ist nicht so leicht einzusehen: denn es kommen hier drey veränderliche Größen x, y und p vor, deren letztere $p = \frac{dy}{dx}$ zwar die Verhältnisse zwischen den Differentialien dy und dx andeutet, aber die Arbeit deswegen nicht erträglicher macht; überdas ist auch die Formul Z sehr verwickelt, und aus allen diesen dreyen veränderlichen Größen zusammengesetzt.

19. Da nun, um die gegenwärtige und andere dergleichen Gleichheiten zu behandeln, kein sicheres Mittel bekannt ist, so wird diese Arbeit durch einige gewagte Versuche unternommen werden müssen. Und weil diese Gleich-

heit nur die zwey Differentialien dx und dp in sich enthält, so wird dieselbe, wenn sie durch p vermehret und für $pdx\ dy$ geschrieben wird, sich in eine andere verwandeln, so die beiden Differentialien dy und dp in sich begreift. Laßt uns also diese beyden Gleichungen, welche zwar völlig miteinander übereinstimmen, und nur eine ausmachen, zusammen betrachten. Hier sind sie

$$\text{I.}\quad mdx = \frac{2(y-px)dx}{Z} - \frac{aa(aa+xx+yy)dp}{Z^3},$$

$$\text{II.}\quad mdy = \frac{2(y-px)dy}{Z} - \frac{aap(aa+xx+yy)dp}{Z^3}.$$

Nun wage man einige Versuche, ob aus einer gewissen Vereinigung dieser beyden Gleichheiten nicht eine neue heraus gebracht werden kann, deren Integrale von freyen Stücken in die Augen fällt. Und ich merke hier sogleich an, daß der Theil $aa + xx + yy$ des letzten Grades einen nicht schlechten Grund zu vermuthen geben, daß diejenige Vereinigung, wodurch die erste Seite der neuen Gleichheit $m(xdx + ydy)$ wird, nicht ohne Nutzen angestellt werden möchte.

20. Auf diese Art werden wir aber auf folgende Gleichheit verfallen

$$m(xdx+ydy) = \frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z} - \frac{aa(x+py)(aa+xx+yy)dp}{Z^3},$$

ob dieselbe nun integrabel sey oder nicht? möchte wohl der Mühe werth seyn, näher untersucht zu werden. Weil aber das Integrale des ersten Gliedes $= \frac{1}{2}m(xx+yy)$ ist, so müßte das Integrale der beyden übrigen Glieder nothwendig folgende Gestalt haben

$$\frac{(xx+yy+C)(y-px)}{Z}.$$

Und wenn dieses angeht, so fragt man, was für den Buchstaben C gesetzt werden muß? Wenn man aber hinwiederum die oben angezeigte Formul differentiiret, so erhält man

$$\frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z} + (xx+yy+C)\,d\cdot\frac{y-px}{Z}.$$

Nun ist, weil $Z = \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$,

$$d\cdot\frac{y-px}{Z} = \frac{-aax(1+pp)dp - aapdp(y-px)}{Z^3}$$

und folglich

$$d\cdot\frac{y-px}{Z} = \frac{-aa(x+py)dp}{Z^3}.$$

21. Hieraus erhellet also, daß wenn $C = aa$ genommen wird, das Differentiale der Formul

$$\frac{(xx + yy + aa)(y - px)}{Z}$$

genau die beyden übrigen Glieder unserer Gleichheit geben; folglich, wenn für $\frac{m}{2}$ der Buchstaben n geschrieben und eine neue willkührliche und beständige Größe bey der Integration eingefürt wird, so werden wir die folgende Gleichheit erhalten, welche die Natur der gesuchten krummen Linien näher zu erkennen giebt, da sie nunmehro schon einmal integrirt worden ist.

$$n(xx + yy + ab) = \frac{(aa + xx + yy)(y - px)}{Z}$$

oder, wenn für Z sein Werth gesetzt wird,

$$n(ab + xx + yy) = \frac{(aa + xx + yy)(y - px)}{\sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}}.$$

Es ist aber diese Gleichheit noch eine Differentialgleichheit von der ersten Ordnung, daher man also leicht eine Verzeichnung der gesuchten krummen Linie herleiten könnte, wenn man sich nur erinnert, daß $p = \frac{dy}{dx}$ ist.

22. Bevor wir aber die Integration dieser Gleichheit auf eine allgemeine Art unternehmen, so wird es nicht undienlich seyn, einen besonders merkwürdigen Fall vorhero entwickelt zu haben, derjenige Fall nämlich, wo $b = a$ ist.

Denn weil alsdann die Gleichheit durch $aa + xx + yy$ theilbar wird, so erhalten wir

$$n = \frac{y - px}{\sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}}$$

und folglich $nnaa(1 + pp) = (1 - nn)(y - px)^2$.

Es kann aber diese Gleichheit nur alsdann möglich seyn, wenn $nn < 1$. Laßt uns derohalben setzen $\frac{nn}{1 - nn} = kk$, und nachdem beyderseits die Quadratwurzel ausgezogen worden, so wird $y - px = ka\sqrt{1 + pp}$. Wenn man hier aber für p seinen Werth $\frac{dy}{dx}$ setzen wollte, so würde man finden, daß die Integration sehr großen Schwierigkeiten unterworfen wäre.

23. Man wird demnach auf andere Kunstgriffe bedacht seyn müssen. Wenn aber die gefundene Gleichung etwas sorgfältiger betrachtet wird, so wird man wahrnehmen, daß dieselbe glücklicher Weise zu derjenigen Gattung von ganz besondern Differentialgleichheiten gehöre, deren Integrale durch Hülfe einer Differentiation heraus gebracht wird. Denn weil $dy = pdx$, so wird das Differentiale unserer Gleichung seyn

$$-xdp = \frac{kapdp}{\sqrt{1+pp}},$$

welche keiner Schwierigkeit mehr unterworfen ist. Da diese Gleichheit aber durch dp theilbar ist, so sehen wir, daß erstlich $p = \alpha$ der Aufgabe ein Genügen leisten müsse, also daß wir hier für die Figur der Grundfläche eine grade Linie erhalten, so in dieser Gleichheit $y = \alpha x + ka\sqrt{1+\alpha\alpha}$ begriffen ist. Weil hier aber α und k von unserm Gutdünken abhängen, so ist klar, daß gar alle gerade Linien, sie mögen eine Lage haben, wie man will, hierzu gehören. Aber da auf diese Weise der Kegel nicht geschlossen ist, so werden unsere Bedingungen hierdurch auch nicht eigentlich erfüllet, dieweil wir nämlich angenommen haben, daß die Grundfläche des Kegels eine allenthalben eingeschlossene Figur habe.

24. Nachdem wir also hier die gerade Linie ausgeschlossen haben, so wird unsere gefundene Gleichung, wenn dieselbe durch dp getheilet worden, folgende Auflösung darreichen

$$x = \frac{-kap}{\sqrt{1+pp}}, \text{ folglich } y = \int pdx = \frac{-kapp}{\sqrt{1+pp}} + ka\sqrt{1+pp} = \frac{ka}{\sqrt{1+pp}}$$

und also $xx + yy = kkaa = cc$; wenn nämlich $ka = c$ gesetzt wird. Hieraus sehen wir also, daß alle aufrechte Kegel, deren Grundflächen Zirkel sind, der Aufgabe ein Genügen leisten. Folglich wird für eine jegliche gegebene Höhe a der gemeine aufrechte Kegel, dessen Grundfläche ein Zirkel von beliebigem Durchmesser ist, diese sehr merkwürdige Eigenschaft besitzen, daß demselben unter allen andern Kegeln, so mit ihm einerley Höhe haben, und einerley körperlichen Raum einschließen, die kleinste Oberfläche zukomme.

25. Es scheinet zwar, daß diese Auflösung der vorgelegten Aufgabe dergestalt ein Genügen leiste, daß dadurch alle andere Auflösungen völlig ausgeschlossen sind. Denn die gegebene Höhe, und dergleichen körperlicher Raum, so dem Kegel zukommen soll, mag beschaffen seyn wie man will, so kann man allemal einen gemeinen aufrechten Kegel finden, der eben dieselbe

Höhe und eben denselben körperlichen Raum hat, weil derselbe Raum durch den Innhalt der Grundfläche bestimmt wird. Unterdessen wenn wir die Natur der vorgelegten Frage etwas genauer erwägen, so werden wir dennoch befinden, daß die eben gefundene Auflösung nicht für allgemein gehalten werden kann. Denn es ist bekannt, daß alle dergleichen Aufgaben, welche, wie die vorgelegte, zu den Maximis und Minimis gehören, noch verschiedene andere und willkührliche Bestimmungen in sich begreifen, so in der Aufgabe selbsten nicht eigentlich enthalten sind. Nämlich, da hier die Figur der Grundfläche bestimmt werden soll, so wird nicht nur ihre Größe in Betrachtung gezogen, sondern man kann noch überdas allezeit zwey Puncten nach Belieben annehmen, durch welche die verlangte krumme Linie durchgehen soll. Und es kommen sogar bey den Maximis und Minimis auch solche Aufgaben vor, in deren Auflösung noch weit mehrere Puncten, durch welche eine krumme Linie gezogen werden soll, unserer Willkühr überlassen werden.

26. Wenn demnach gegenwärtige Aufgabe, nach der Beschaffenheit und Natur ihrer Auflösung, also vorgetragen wird, daß für eine gegebene Höhe $OC = a$ unter allen Kegeln, welche nicht nur einerley körperlichen Raum einschließen, sondern deren Grundfläche noch überdas durch zwey nach Belieben angenommene Puncte gehen solle, derjenige Kegel zu bestimmen sey, dessen Oberfläche am kleinsten, oder ein Minimum ist. Wenn man, sage ich, die Aufgabe also einkleidet, so ist offenbar, daß eine zirkelrunde Grundfläche nicht allezeit, und nur in denen Fällen der Aufgabe ein Genügen leisten könne, wenn die angenommenen zwey Puncten genau in die Peripherie desjenigen Zirkels, so dem gegebenen Raum des Kegels zukömmt, einfallen. Und so oft dieses nicht geschieht, so wird man allezeit ganz andere krumme Linie suchen müssen, welche aber alle in unserer allgemeinen Gleichung enthalten sind. Denn weil durch die zweyfache Integration auch zwey willkührliche Größen in die Rechnung kommen, und überdas schon eine dritte, nämlich n vorhanden ist, so kann eine derselben durch den vorgeschriebenen körperlichen Raum, die andern beyden aber aus der Lage der beyden angenommenen Puncten, bestimmt werden.

27. Die Gleichung aber, welche die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe enthält, ist

$$n(ab + xx + yy) = \frac{(aa + xx + yy)(y - px)}{\sqrt{(aa(1 + pp) + (y - px)^2)}},$$

deren Entwicklung ohne einige ganz besondere Kunstgriffe gewiß die größte

Schwierigkeit verursachen könnte. Laßt uns aber folgender Substitution bedienen: es sey $y - px = u\sqrt{1+pp}$, so daß wir hierdurch diese Gleichheit bekommen

$$\frac{n(ab+xx+yy)}{aa+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{aa+uu}},$$

und unser Endzweck sey hierbey alles durch die neue veränderliche Größe u zu bestimmen. Es giebt aber die angenommene Substitution, wenn dieselbe differentiirt wird,

$$x = -\frac{du}{dp}\sqrt{1+pp} - \frac{pu}{\sqrt{1+pp}}$$

und hierdurch erhält man auch

$$y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{1+pp} + \frac{u}{\sqrt{1+pp}},$$

also daß da sey

$$xx + yy = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 + uu .$$

28. Man setze der Kürze halber

$$\frac{u}{\sqrt{aa+uu}} = nU ,$$

also daß U eine gegebene Function von u sey, und folglich hinwiederum

$$u = \frac{naU}{\sqrt{1-nnUU}}$$

eine gegebene Function von U.

Weil nun

$$\frac{ab+xx+yy}{aa+xx+yy} = U ,$$

so wird

$$xx + yy = \frac{aaU-ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 + uu .$$

Hieraus muß also p durch u oder durch U bestimmt werden; da nun

$$\frac{du^2}{dp^2}(1+pp)^2 = \frac{aaU-ab-uu+Uuu}{1-U},$$

so wird

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{du\sqrt{1-U}}{\sqrt{aaU-ab-uu(1-U)}}.$$

29. Wenn wir hier für u seinen Werth $\frac{naU}{\sqrt{1-nnUU}}$ und also $du = \frac{nadU}{(1-nnUU)^{\frac{3}{2}}}$ setzen, so werden wir erhalten

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{nadU\sqrt{1-U}}{(1-nnUU)\sqrt{nn(ab-aa)UU+aaU-ab}}.$$

Es kann aber durch Hülfe dieser Gleichheit die Größe p durch U bestimmt, und hieraus wiederum die zwey veränderlichen Größen x und y durch die in 27ten § gegebene Formuln angezeigt werden. Und es werden diese Werthe also beschaffen seyn, daß da sey

$$xx+yy = \frac{aaU-ab}{1-U} \quad \text{und} \quad y-px = \frac{naU\sqrt{1+pp}}{\sqrt{1-nnUU}},$$

daraus wir ersehen, daß man aus diesen Formuln den oben entwickelten Fall, wo $b=a$ ist, nicht herleiten können; es wird hier nämlich $U=1$, so daß diese Größe aufhöret veränderlich zu seyn. Nichts destoweniger erhellet, daß in dem Fall, wo $b=a$ ist, die Formul $\frac{aaU-ab}{1-U}$ einen beständigen Werth erhalten müsse, und durch welche Eigenschaft die Natur des Zirkels auf das deutlichste angedeutet wird.

30. Die Construction der krummen Linie wird sich demnach also verhalten. Man wird nämlich zu erst die Verhältniß zwischen p und U aus folgender Gleichung bestimmen

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{nadU\sqrt{1-U}}{(1-nnUU)\sqrt{nn(ab-aa)UU+aaU-ab}}$$

und wenn dieselbe gefunden worden, so werden die beyden Coordinaten x und y der verlangten Grundfläche seyn

$$x = -\frac{napU}{\sqrt{(1+pp)(1-nnUU)}} + \frac{\sqrt{nn(ab-aa)UU+aaU-ab}}{\sqrt{(1+pp)(1-U)(1-nnUU)}}$$

$$y = +\frac{naU}{\sqrt{(1+pp)(1-nnUU)}} + \frac{p\sqrt{nn(ab-aa)UU+aaU-ab}}{\sqrt{(1+pp)(1-U)(1-nnUU)}}.$$

So oft also das Integrale

$$\int \frac{nadU\sqrt{1-U}}{(1-nnUU)\sqrt{nn(ab-aa)UU+aaU-ab}}$$

durch einen Zirkelbogen angedeutet werden kann, so durch einen Zirkelbogen, dessen Tangens gleich p ist, abgemessen wird, so oft wird auch die Figur der Grundfläche eine algebraische krumme Linie seyn.

Da wir aber diese Formul in ihrer allgemeinen Gestalt von der Irrationalität nicht befreyen können, so wird es auch nicht möglich seyn, die Integration derselben durch die bloße Quadratur des Zirkels zu vollenden.

31. Derjenige Fall, wo $n = 1$ ist, hat nun diese Bequemlichkeit, daß die Irrationalität weggeschafft werden kann, und derowegen wollen wir denselben auch besonders entwickeln: Es wird aber

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{adU}{(1-UU)\sqrt{aaU-abU-ab}}$$

und folglich

$$x = \frac{-apU+\sqrt{aaU-abU-ab}}{\sqrt{(1+pp)(1-UU)}}$$

und

$$y = \frac{+aU+p\sqrt{aaU-abU-ab}}{\sqrt{(1+pp)(1-UU)}}.$$

Laßt uns also setzen $\sqrt{aaU-abU-ab} = v$, so wird

$$U = \frac{vv+ab}{aa-ab}, \quad dU = \frac{2vdv}{aa-ab} \quad \text{und} \quad 1-UU = \frac{(aa+vv)(aa-2ab-vv)}{(aa-ab)^2},$$

folglich

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{2a(aa-ab)\,dv}{(aa+vv)(aa-2ab-vv)},$$

welche Gleichheit folgendermaßen zergliedert wird

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{adv}{aa+vv} + \frac{adv}{aa-2ab-vv}.$$

32. Hieraus sehen wir also, daß, wenn $2ab > aa$ wäre, beyde Theile Zirkelbögen geben würden: weil aber alsdann die Formul $\sqrt{1-UU}$ unmöglich wird, so würde auch die krumme Linie selbsten unmöglich werden. Folglich wird hier nothwendig erforderet, daß $aa > 2ab$ sey. In welchem Fall aber das letzte Glied durch die Logarithmen integrabel wird. Wenn wir also setzen $aa - 2ab = cc$ oder $ab = \frac{aa-cc}{2}$, so erhalten wir

$$\text{Ang. tang } p = \text{Ang. tang } \frac{v}{a} + \frac{a}{2c}\, l\, \frac{c+v}{c-v} + \alpha$$

und folglich

$$p = \text{tang}\left(\alpha + \text{Ang. tang } \frac{v}{a} + \frac{a}{2c}\, l\, \frac{c+v}{c-v}\right).$$

Nachdem aber auf diese Weise die Größe p durch v bestimmt worden, so werden die Coordinaten x und y der krummen Linie seyn

$$x = \frac{-ap(aa - cc + 2vv) + (aa + cc)v}{2\sqrt{(1+pp)(aa+vv)(cc-vv)}}, \quad y = \frac{+a(aa - cc + 2vv) + (aa+cc)pv}{2\sqrt{(1+pp)(aa+vv)(cc-vv)}}.$$

33. Diese letztere Auflösung aber öffnet uns den Weg zu einer andern, die weit kürzer und schöner ist. Wir sehen nämlich, daß die gerade Linie $CM = \sqrt{xx + yy}$ in unseren Formuln zum öftern vorkömmt. Laßt uns dieselbe also anstatt der Coordinaten in der Rechnung einführen, und mit derselben noch einen Winkel verknüpfen; es sey derohalben $CM = z$ und $PCM = \Phi$, also daß $xx + yy = zz$ und $x = z\cos\Phi$, $y = z\sin\Phi$ ist; da nun $U = \frac{ab + zz}{aa + zz}$ ist, so wird

$$y - px = \frac{ua(ab+zz)\sqrt{1+pp}}{\sqrt{(aa+zz)^2 - nn(ab+zz)^2}},$$

weil ferner $dx = dz\cos\Phi - zd\Phi\sin\Phi$ und $dy = dz\sin\Phi + zd\Phi\cos\Phi$, so wird

$$p = \frac{dz\sin\Phi + zd\Phi\cos\Phi}{dz\cos\Phi - zd\Phi\sin\Phi},$$

folglich

$$y - px = \frac{-zzd\Phi}{dz\cos\Phi - zd\Phi\sin\Phi} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{dz^2 + zzd\Phi^2}}{dz\cos\Phi - zd\Phi\sin\Phi}.$$

Wenn wir demnach diese gefundenen Werthe an ihre gehörige Örter schreiben, so werden wir folgende Gleichung zwischen z und Φ bekommen

$$\frac{-zzd\Phi}{\sqrt{dz^2 + zzd\Phi^2}} = \frac{na(ab+zz)}{\sqrt{(aa+zz)^2 - nn(ab+zz)^2}}.$$

34. Man nehme beyderseits die Quadrate, und man wird endlich auf diese Gleichung verfallen

$$(aa+zz)^2z^4d\Phi^2 - nn(ab+zz)^2z^4d\Phi^2 = nnaa(ab+zz)^2dz^2 + nnaa(ab+zz)^2zzd\Phi^2,$$

daraus wird dann sogleich erhalten

$$d\Phi = \frac{na(ab+zz)dz}{z\sqrt{(aa+zz)\,(zz(aa+zz) - nn(ab+zz)^2)}}.$$

Sobald man aber durch Hülfe dieser Gleichheit die Verhältniß zwischen der geraden Linie z und dem Winkel Φ gefunden, so wird daraus die Verzeichniß der gesuchten krummen Linie unmittelbar hergeleitet. Es erhellet ferner aus dieser Auflösung sogleich, daß man der gefundenen Gleichheit ein völliges Genügen leiste, wenn für z eine solche beständige Größe angenommen wird, daß dadurch der Nenner vernichtet werde; oder wenn man $zz(aa + zz) = nn(ab + zz)^2$ setzt. In diesem Fall wird aber die schon oben gefundene Auflösung durch die zirkelrunde Grundflächen herausgebracht.

35. Man kann auch aus dieser Gleichheit den Innhalt der Grundfläche selbsten, dadurch dann weiter der körperliche Raum des Kegels bestimmt wird, ganz leichte finden. Dann weil der Innhalt der Grundfläche auf eine allgemeine Art durch $\frac{1}{2}\int zzd\Phi$ angedeutet wird, in sofern man nämlich nach der Integration den Winkel Φ bis zu vier rechten Winkeln ausbreitet, so wird der Innhalt unserer gesuchten Grundfläche seyn

$$\tfrac{1}{2}\int zzd\Phi = \int \frac{na(ab + zz)zdz}{2\sqrt{(aa + zz)\,(zz(aa + zz) - nn(ab + zz)^2)}}.$$

Endlich da die Oberfläche des Kegels durch $\frac{1}{2}\int dx\sqrt{aa(1 + pp) + (y - px)^2}$ ausgedrückt wird, so werden wir erstlich, wenn wir für x, y und p die eben angezeigten Werthe durch z und Φ schreiben, die Oberfläche eines jeglichen Kegels auf eine allgemeine Art also ausgedrückt finden, nämlich

$$= \tfrac{1}{2}\int\sqrt{aadz^2 + zz(aa + zz)d\Phi^2}.$$

Setzen wir nun hier ferner für $d\Phi$ seinen gefundenen Werth, so wird die Oberfläche unsers verlangten Kegels seyn

$$\tfrac{1}{2}\int dx\sqrt{aa(1 + pp) + (y - px)^2} = \frac{a}{2}\int \frac{zdz\sqrt{aa + zz}}{\sqrt{zz(aa + zz) - nn(ab + zz)^2}}.$$

ELEMENTA CALCULI VARIATIONUM

Commentatio 296 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10 (1764), 1766, p. 51—93
Summarium ibidem p. 9—13

SUMMARIUM

Iam ante celeberrimum problema isoperimetricum insignia quaedam specimina huc pertinentia a Geometris sunt edita, cum antiquissimis iam fuerit exploratum circulum inter omnes alias figuras pari perimetro inclusas maximam aream complecti; quam quidem proprietatem ex circuli natura concluserunt, minime vero ipsam quaestionem directe aggredi sunt ausi, ut inter omnes figuras aequali perimetro terminatas eam investigarent, quae maximam aream includeret. Haec scilicet quaestio nimis est ardua, quam ut ante insignem calculi infinitorum promotionem de ea saltem cogitare licuisset. Mox vero primis quasi iactis huius calculi fundamentis ab acutissimo IOHANNE BERNOULLI quaestio de brachystochronis felicissimo successu est resoluta, quippe qua inter omnes lineas a puncto sublimiori ad humilius ductas ea quaerebatur, super qua grave tempore brevissimo descendat, quam egregiam proprietatem cycloidi competere invenerat. Methodus autem, qua Vir celeberrimus erat usus, fratri ipsius natu maiori IACOBO BERNOULLI manifesto occasionem praebuisse videtur solutionem magni problematis isoperimetrici, quod deinceps tractavit, meditandi. Latissimo scilicet ambitu omnes huius generis quaestiones in hoc problemate est complexus, ut inter omnes lineas intra data duo puncta ducendas, sive debeant esse eiusdem longitudinis (unde quîdem nomen isoperimetrici est natum) sive alia quadam indole communi praeditae, eam investigaret, quae vel maximam aream vel circa datum axem rotata maximum solidum vel in genere quamcumque maximi minimive proprietatem contineret. Methodum autem, qua summus illius temporis Geometra est usus, perpendentes ancipites haeremus, utrum magis eius incredibilem patientiam in prolixissimis et taediosissimis calculis expediendis, an summam sagacitatem in conclusionibus satis concinnis inde deducendis admirari debeamus. Ob hanc ipsam autem causam, quod conclusiones prodierint satis concinnae, mox suspicari licebat viam planiorem ac breviorem dari eodem perducentem; quam etiam eius frater iunior IOHANNES satis feliciter est ingressus, etiamsi statim pro quibusdam casibus nimis absconditis negotium minus successerit, quem tamen defectum deinceps, toto hoc argumento profundius retractato, largiter compensavit. Longo postea interiecto tempore Auctor harum disserta-

tionum in eodem problemate evolvendo summum studium collocavit, et cum perspexisset omnes huius generis quaestiones eo redire, ut eiusmodi linea curva aequatione inter coordinatas x et y exprimenda investigetur, in qua talis formula integralis $\int V dx$, quomodocunque quantitas V per x et y fuerit data, maximum minimumve valorem obtineat. Nunc autem evidens est in ista quantitate V infinitam varietatem locum habere posse, prout in eam praeter ipsas variabiles x et y tam earum differentialia cuiuscunque ordinis quam novae insuper formulae integrales ingrediuntur. Quodsi iam solutiones BERNOULLIANAE ad hanc normam examinentur, eae tantum ad eos casus, quibus quantitas V sola differentialia primi gradus involvit, restrictae reperiuntur ac praeterea casus, quibus in quantitate V novae formulae integrales insunt, inde penitus excluduntur, paucissimis exceptis, quos facile pro indole quaestionis ab hoc incommodo liberare licet. Hunc igitur defectum noster Auctor felicissime cum in his Commentariis tum in opere singulari de hoc argumento edito supplevit, ut vix quicquam, quod amplius desiderari queat, reperiatur. Interim tamen ipsa methodus, etiamsi totum negotium satis expedite conficiat, tamen ipsi non satis naturalis est visa, propterea quod vis solutionis tota in consideratione elementorum curvae investigandae erat posita, ipsa vero quaestio facile ita adornari possit, ut ex Geometria penitus ad solam Analysin puram revocetur. Quaestio enim ita proposita, ut data quantitate V utcunque ex binis variabilibus x, y earumque differentialibus cuiuscunque ordinis, quin etiam ex formulis integralibus utcunque conflata, ea inter x et y relatio investigari debeat, qua formulae integrali $\int V dx$ maximus minimusve valor concilietur? hoc inquam modo quaestio proposita prorsus a Geometria segregatur; ex quo etiam methodus genuina eam resolvendi a Geometria immunis esse debebat; et quo difficilius Analysis ad hunc scopum accommodari poterat, eo maiora incrementa huius scientiae, si res successerit, merito sperari licebat. Tametsi autem Auctor de hoc diu multumque esset meditatus atque amicis hoc desiderium aperuisset, tamen gloria primae inventionis acutissimo Geometrae Taurinensi LA GRANGE erat reservata, qui sola Analysi usus eandem plane solutionem est adeptus, quam Auctor ex considerationibus geometricis elicuerat. Verum ipsa illa solutio ita erat comparata, ut novam plane Analyseos speciem constituere eiusque fines non mediocriter promovere videretur; ex quo Auctori occasio est oblata hanc scientiam novo Calculi genere locupletandi, quem *Calculum variationum* appellat et cuius elementa hic tradere ac dilucide explicare constituit. Hic quidem calculus perinde ac differentialis in incrementis infinite parvis inter se comparandis versatur, verum in ratione tractationis ab eo maxime discrepat. Cum enim in calculo differentiali ex data quantitatum variabilium relatione relatio inter earum differentialia cuiusque ordinis investigetur, in calculo variationum ipsa relatio inter variabiles infinite parum immutari concipitur, ita ut, dum secundum relationem datam pro quovis alterius variabilis x valore altera y certum valorem sortitur,

calculo variationum huic ipsi valori y incrementum quoddam infinite parvum adiiciatur, ex quo deinceps, quemadmodum formulae tam differentiales quam integrales varientur, definiri oportet. Incrementum illud cuicunque valori y adiectum ab Auctore eius variatio vocatur ac, ne cum differentialibus confundatur, hoc charactere δy designatur; cum igitur hinc omnes formulae tam differentiales quam integrales, quatenus quantitatem y involvunt, certas variationes nanciscantur, auctor in priore dissertatione principia ac praecepta stabilit, quorum ope omnium huiusmodi formularum variationes definiri possunt: ita si W denotet huiusmodi formulam quamcunque, eius variationem δW per regulas peculiares assignare docet. Quo singulari calculo constituto deinceps in sequente dissertatione eius applicationem ad omnia problemata, quae circa maxima et minima excogitari possunt, clarissime ostendit, inque negotio hoc imprimis observari meretur, quod ita nova methodus mere analytica multo pleniores ac perfectiores solutiones suppeditet, quam prior illa ex Geometria petita.

Mox post inventa calculi differentialis principia eiusmodi problemata tractari sunt coepta, quae plane singularem huius calculi applicationem requirebant. Cum enim munus calculi differentialis in hoc potissimum consistat, ut proposita functione quacunque quantitatis variabilis x eius incrementum investigetur, dum quantitas x suo differentiali dx crescere assumitur, translatione ad Geometriam facta in promtu erat inde linearum curvarum tangentes et ipsas curvaturas definire, quarum rerum investigatio immediate ex natura differentialium derivatur. Aliter vero comparata est ratio eiusmodi problematum, quibus innumerabiles lineae curvae sub quapiam generali aequatione contentae proponuntur, a quibus arcus longitudine aequales, sive qui a gravi descendente eodem tempore percurrantur, abscindi oporteat, ex quo posteriori genere problema curvarum synchronarum est natum. In his enim quaestionibus non tam id est spectandum, quantum incrementum cuiusque curvae applicata accipiat, dum abscissa suo differentiali augetur, quam, quantum [arcus longitudo] sive tempus descensus per eundem varietur, si ipse arcus in alia curva capiatur. Talia problemata per differentiationem parametrorum resolvi dicuntur, quandoquidem variabilitas parametri omnes illas innumerabiles curvas propositas complectitur. Quo autem clarius perspiciatur principium, ex quo huiusmodi problematum solutio est petenda, proposita sit aequatio quaecunque inter abscissam x et applicatam y, quae insuper quantitatem constantem a parametrum vocandam contineat; quae quamdiu eundem valorem retinet, aequatio praebebit unam quandam lineam curvam, verum si ipsi

a successive alii atque alii valores tribuantur, aliae continuo lineae curvae orientur. Quodsi iam quaestio circa arcus harum curvarum versetur, quoniam cuiusque curvae arcus per $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ exprimitur, in qua integratione parameter a pro constanti assumitur; totum negotium huc redit, ut formulae integralis $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ incrementum definiatur, quod accipit, dum in ea loco quantitatis a eadem suo incremento da aucta substituatur. Generatim igitur, si loco arcus alia quaecunque expressio integralis $\int Z dx$ tractetur, quae integratio ex data inter x et y aequatione sit conficienda, parametro a pro constanti habita, quaeritur, quantam variationem eadem expressio $\int Z dx$ iam integrata sit passura, si in aequatione inter x et y data parameter a elemento da augeatur. Eodem referendum est celebre illud traiectoriarum orthogonalium problema, in quo etiam infinitae lineae curvae sub data aequatione inter abscissam x, applicatam y et parametrum variabilem a contentae proponuntur atque eiusmodi linea curva quaeritur, quae illas omnes ad angulos rectos traiiciat. Ad quod problema solvendum applicata y ut functio ipsarum x et a spectari solet, ex cuius differentiatione talis forma $dy = pdx + qda$ emergere concipitur, tum vero pervenitur ad hanc aequationem differentialem

$$dx(1 + pp) + pqda = 0 \quad \text{sive ad hanc} \quad dx + pdy = 0 ,$$

ex qua cum illa coniuncta parametrum a eliminari oportet, ut eliciatur aequatio inter x et y naturam curvae quaesitae exprimens. Quando quidem curvae secandae per aequationem algebraicam inter x et y dantur, res nullam habet difficultatem, cum inde valor ipsius y absolute per x et a definiri indeque per differentiationem valores litterarum p et q assignari queant, unde aequatio differentialis inter duas tantum variabiles x et a obtinetur; verum, si aequatio pro curvis secandis ipsa iam sit differentialis parametrum a ut quantitatem constantem involvens, quae idcirco erit huius formae $dy = pdx$ seu $y = \int pdx$, ante omnia investigari oportet, cuiusmodi aequatio differentialis proditura esset, si praeter x etiam parameter a ut variabilis statuatur, ut inde quantitas q innotescat; quae investigatio saepe maxime fit difficilis atque adeo vires Analyseos superare videtur. Etiamsi autem ratio huius investigationis ex solis calculi differentialis principiis sit petenda, tamen in ipsa tractatione ingens statim cernitur discrimen, propterea quod, cum differentiatio ordinaria nulli difficultati soleat esse obnoxia, hic tota difficultas in inventione differentialium ex variabilitate parametri oriundorum resideat haecque ipsa inventio singulares regulas requirat. Quamobrem non praeter necessitatem partes Analyseos infinitorum multiplicari videbuntur, si investigationem huiusmodi

differentialium, quae ex variabilitate parametri nascuntur, ad peculiarem calculum referamus, quem distinctionis causa *Calculum variationum* appellare liceat. Cuius necessitas adhuc clarius perspicietur, si perpendamus eius vim multo latius patere, quam ad solam parametrorum variabilitatem, qua etsi lineae curvae in infinitum multiplicantur, omnes tamen semper sub certo quodam genere, quod scilicet in data aequatione contineatur, comprehenduntur. Nostrum autem calculum variationum non solum ad huiusmodi genera curvarum determinata extendi conveniet, sed etiam ad omnes omnino curvas, quae quidem concipi queant, veluti si inter omnes plane curvas ea sit definienda, quae data quapiam maximi minimive proprietate gaudeat. Atque huc referendum erit celebratissimum illud problema isoperimetricum latissimo sensu acceptum, prout id quidem in libro singulari pertractavi; quem qui attente legerit, non dubitabit, quin huius generis investigationes calculi speciem prorsus singularem postulent a consuetis Analyseos regulis non parum diversam. Haec enim problemata ad talem quaestionem reducuntur, ut eiusmodi aequatio inter binas variabiles x et y determinetur, ex qua expressio quaepiam integralis $\int Z dx$, quomodocunque Z per x et y componatur, maximum sive minimum valorem consequatur. Ad hoc autem efficiendum necesse est, ut proposita huiusmodi formula $\int Z dx$ quacunque, quae quidem ex assumta quavis relatione inter x et y determinatum valorem accipiat, in genere definiatur, quantam mutationem ea formula sit subitura, si ipsa relatio inter x et y infinite parum quomodocunque varietur; haecque quaestio iam infinities latius patet, quam superior, ubi tantum mutatio ex variatione parametri oriunda assignari debebat. Potest etiam loco simplicis formulae integralis $\int Z dx$ expressio quaecunque utcunque ex x, y harumque differentialibus atque formulis integralibus composita considerari, quo longius haec tractatio extendatur; tum vero calculus variationum regulas suppeditabit mutationem huiusmodi expressionum definiendi, quae ob relationem variabilium x et y utcunque infinite parum mutatam ipsis inducitur. Methodus quidem in solutione problematum isoperimetricorum adhiberi solita iam eximia huius calculi specimina suggerit, quae autem cum sint ex alieno quasi fonte, Geometria scilicet, hausta, non ad constitutionem principiorum istius calculi desiderati referri possunt. Deinde vero etiam haec specimina ad scopum nimis particularem sunt adstricta, quam ut amplitudinem nostri calculi complecti possint. Quamobrem constitui eius elementa ex primis Analyseos principiis repetere eaque ita evolvere, ut non solum problematibus supra commemoratis facile et concinne solvendis inservire possint, sed etiam novum quasi campum

aperiant sese ad plurima alia talium quaestionum genera extendentem, in quo Geometrae non sine insigni finium Analyseos promotione vires suas exercere queant.

HYPOTHESIS 1

1. Detur inter variabiles binas x et y aequatio quaecunque, qua earum relatio mutua exprimatur, ita ut inde, quicunque valor determinatus ipsi x tribuatur, valor quoque determinatus pro y definiatur.

COROLLARIUM 1

2. Proposita ergo aequatione inter binas variabiles x et y singulis valoribus ipsius x, quicunque concipi possunt, determinati valores ipsius y respondebunt.

COROLLARIUM 2

3. Vi ergo istius aequationis propositae erit y certa quaedam functio ipsius x et, quemadmodum ipsi x respondet y, ita illius valori sequenti $x' = x + dx$ respondebit $y' = y + dy$, cuius differentia a praecedente y, differentiale nempe dy, per vulgares differentiandi regulas assignari poterit.

COROLLARIUM 3

4. Cum y sit functio ipsius x, etiam $\frac{dy}{dx}$ erit functio ipsius x per relationem inter x et y datam assignabilis; ac si ponatur $\frac{dy}{dx} = p$, simili modo $\frac{dp}{dx}$ erit certa functio ipsius x; ac si porro ponamus $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, $\frac{dr}{dx} = s$ etc., etiam hae quantitates q, r, s etc. erunt certae functiones ipsius x itidem per relationem inter x et y datam assignabiles.

COROLLARIUM 4

5. Si deinde V sit expressio quomodocunque ex x et y conflata, ea quoque ope relationis inter x et y datae ita erit comparata, ut pro omnibus valoribus ipsius x valores determinatos adipiscatur. Ac si V' designet valorem sequentem seu ipsi $x + dx$ convenientem, erit $V' = V + dV$ sive $dV = V' - V$, secundum prima calculi differentialis principia.

HYPOTHESIS 2

6. Quaecunque proponatur relatio inter x et y, quia inde simul relatio differentialium dx et dy innotescit, ponam in sequentibus perpetuo:

$$\frac{dy}{dx} = p\ , \quad \frac{dp}{dx} = q\ , \quad \frac{dq}{dx} = r\ , \quad \frac{dr}{dx} = s \quad \text{etc.}$$

eruntque p, q, r, s etc. perinde ac y functiones ipsius x per illam relationem datam assignabiles.

COROLLARIUM 1

7. Quemadmodum littera p relationem differentialium dx et dy continet, ita q complectetur relationem differentialium secundi gradus, r vero differentialium tertii gradus, s quarti gradus etc.

COROLLARIUM 2

8. Vicissim igitur etiam, si qua in expressione V differentialia sive primi sive secundi sive altioris ordinis insint, ea introducendis his quantitatibus p, q, r, s etc. ex calculo tolli poterunt.

AXIOMA

9. Si inter variabiles x et y alia relatio a proposita infinite parum discrepans constituatur, valores ipsius y, singulis valoribus ipsius x respondentes, ab iis, quos proposita relatio praebet, infinite parum discrepabunt.

COROLLARIUM 1

10. Cum huiusmodi relatio variata infinitis modis a relatione proposita discrepare possit, ita ut discrepantia sit infinite parva, evenire potest, ut unus pluresve valores ipsius y, qui certis valoribus ipsius x respondent, nullam inde mutationem patiantur.

COROLLARIUM 2

11. Ista variatio relationis ita generalis concipi potest, ut inde omnes valores ipsius y mutationes quascunque patiantur, quo nullo modo a se invicem pendeant. Quo igitur haec tractatio latissime pateat, huiusmodi variationem relationis generalissime conceptam intelligi conveniet.

HYPOTHESIS 3

12. Si relatio inter x et y proposita parum mutetur, valorem ipsius y, qui inde ipsi x respondet, per $y + \delta y$ designemus, ita ut δy variationem denotet, quam y ob variatam relationem patitur.

COROLLARIUM 1

13. Simili modo cum y' sit valor ipsi $x + dx$ vi relationis propositae respondens, eius valorem, qui eidem $x + dx$ vi relationis variatae convenit, per $y' + \delta y'$ exprimamus, ita ut $\delta y'$ variationem ipsius y' denotet, quae ex variatione relationis oritur.

COROLLARIUM 2

14. Cum igitur sit $y' = y + dy$, erit

$$\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy \quad \text{et} \quad \delta dy = \delta y' - \delta y \ .$$

Denotabit autem δdy variationem ipsius dy ex variatione inter x et y propositae ortam.

COROLLARIUM 3

15. Quemadmodum autem y' statum sequentem ipsius y denotat, statu scilicet sequente ad $x + dx$ relato, ita $\delta y'$ statum sequentem ipsius δy denotat, ex quo $\delta y' - \delta y$ exprimet differentiale ipsius δy, quod est $d\,\delta y$. Cum ergo sit $\delta dy = \delta y' - \delta y$, erit $\delta dy = d\,\delta y$.

COROLLARIUM 4

16. Hinc ergo consequimur istam insignem proprietatem: quod variatio differentialis ipsius y aequalis sit differentiali variationis ipsius y. Est enim δdy variatio ipsius dy, hoc est differentialis ipsius y, et $d\,\delta y$ est differentiale ipsius δy, hoc est variationis ipsius y.

DEFINITIO 1

17. Si V sit expressio utcunque ex x et y conflata, proposita quadam relatione inter x et y, eius variatio, quam per δV indicabo, est incrementum, quod quantitas V capit, si relatio inter x et y proposita infinite parum varietur.

COROLLARIUM 1

18. Probe ergo distingui oportet differentiale dV et variatio δV; differentiale enim denotat incrementum ipsius V, dum x suo elemento dx augetur, manente relatione inter x et y proposita; variatio autem denotat incrementum ipsius V, dum ipsa relatio variatur manente x.

COROLLARIUM 2

19. Cum per variationem relationis inter x et y propositae quantitas y incrementum capiat δy manente x eadem: quomodocunque quantitas V ex x et y fuerit conflata, eius variatio reperietur, si loco y ubique scribatur $y + \delta y$ et a valore hinc pro V oriundo ipse valor V subtrahatur.

COROLLARIUM 3

20. Scilicet si in V ubique pro y scribatur $y + \delta y$, prodibit valor variatus ipsius V, qui est $V + \delta V$; ipsa autem variatio reperitur, si a valore variato $V + \delta V$ valor primitivus V subtrahatur.

DEFINITIO II

21. Calculus variationum est methodus inveniendi variationes quantitatum utcunque ex binis variabilibus x et y conflatarum, quas patiuntur, si relatio inter x et y proposita infinite parum quomodocunque immutetur.

COROLLARIUM 1

22. Proposita ergo relatione inter x et y, si V denotet quantitatem quomodocunque ab x et y pendentem, hic calculus docet invenire variationem ipsius V seu valorem ipsius δV.

COROLLARIUM 2

23. Quia relationem inter x et y datam utcunque immutari assumimus, ut y pro singulis valoribus ipsius x variationes quascunque, quae etiam a se invicem non pendeant, accipiat, hic calculus latissime patet atque ad quasvis conditiones variationum datas accommodari poterit.

SCHOLION 1

24. Quo usus huius calculi clarius perspici queat, exemplum afferamus. Proposita ergo sit haec relatio inter x et y

$$aayy - bbxx = aabb ,$$

quae scribendo $b + db$ loco b infinite parum immutetur. Iam si proponatur quantitas quaepiam ab x et y pendens, veluti

$$\int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{Vy} ,$$

huius variatio ex illa immutatione relationis oriunda ope istius calculi exhiberi poterit; cum enim sit

$$y = \frac{b}{a} V(aa - xx) ,$$

erit

$$\delta y = \frac{db}{a} V(aa - xx) ,$$

quae est variatio ipsius y. Quemadmodum autem ex cognita variatione ipsius y quantitatum utcunque ab y et x pendentium ideoque etiam huius

$$\int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{Vy}$$

variationes inde natae determinari debeant, in hoc calculo est ostendendum; unde patet omnia, quae de variabilitate parametrorum passim sunt tradita, hic contineri. Deinde vero etiam quaestiones inverti possunt, veluti si proposita huiusmodi formula

$$\int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{Vy}$$

ea relatio inter x et y quaeratur, unde variatio istius formulae datae prodeat magnitudinis vel etiam nulla, quo posteriori casu relatio inventa formulae propositae maximum minimumve valorem comparabit; atque huc referenda erunt omnia problemata, quae circa curvas maximi minimive proprietate gaudentes adhuc sunt tractata.

SCHOLION 2

25. Praecepta huius calculi ad diversitatem rationis, qua formula quaepiam proposita V a binis variabilibus x et y pendet, sunt accommodanda, quae diversitas cum sit infinita, eam ad aliquot genera praecipua revocari conveniet. Primum ergo genus complectatur eas formulas, quae ex ipsis quantitatibus x et y earumque derivatis

$$p = \frac{dy}{dx} , \quad q = \frac{dp}{dx} , \quad r = \frac{dq}{dx} \text{ etc.}$$

utcunque sunt compositae, ita tamen, ut nullas formulas integrales involvant. Ad secundum genus refero eas formulas, quae integralia huiusmodi $\int Z dx$ contineant, ita tamen, ut ipsa formula Z ad primum genus pertineat. Tertium genus comprehendet eiusmodi formulas, in quibus non solum integralia $\int Z dx$ insunt, sed ubi quantitas Z ipsa insuper integralia involvit. Tandem sequetur quartum genus, in quo formula varianda V non absolute, sed demum per aequationem differentialem vel primi vel adeo altioris gradus definitur, quod genus utique latissime patet ac praecedentia omnia in se complectitur. Quod autem ad aequationem, qua relatio inter x et y exprimitur, attinet, etsi eam ut datam specto, tamen non definio, ne praecepta tradenda ullo modo limitentur.

THEOREMA 1

26. Variatio differentialis cuiusvis quantitatis V aequalis est differentiali variationis eiusdem seu est $\delta dV = d\,\delta V$.

DEMONSTRATIO

Cum sit $dV = V' - V$ denotante V' valorem sequentem ipsius V, qui ipsi $x + dx$ convenit, uti V ipsi x respondet, erit $\delta dV = \delta V' - \delta V$; verum $d\,\delta V$ exprimit differentiam inter δV eiusque valorem sequentem, qui est $\delta V'$, ita ut sit $d\,\delta V = \delta V' - \delta V$, unde perspicuum est esse $\delta dV = d\,\delta V$.

COROLLARIUM 1

27. Eodem modo, si loco V scribamus dV, patet esse $\delta ddV = d\,\delta dV$; sed $\delta dV = d\,\delta V$, unde fit $d\,\delta dV = dd\,\delta V$, sicque aequales inter se erunt hae tres formae

$$\delta ddV = d\,\delta dV = dd\,\delta V \ .$$

COROLLARIUM 2

28. Porro vero, si et hic pro V scribamus dV, obtinebimus aequalitatem inter has quatuor formas

$$\delta dddV = d\,\delta ddV = dd\,\delta dV = ddd\,\delta V \ ,$$

tum vero inter has quinque

$$\delta d^4 V = d\,\delta d^3 V = d^2\,\delta d^2 V = d^3\,\delta dV = d^4\,\delta V \ .$$

COROLLARIUM 3

29. Si habeatur differentiale cuiuscunque ordinis ipsius V, nempe $d^n V$, cuius variatio sit investiganda, erit

$$\delta d^n V = d^m \delta d^{n-m} V = d^n \delta V \ ,$$

aequatur scilicet differentiali ordinis n ipsius variationis δV. Hinc ergo reducitur variatio differentialium ad differentiationem variationis.

PROBLEMA 1

30. Determinare variationes quantitatum p, q, r, s etc. rationem differentialium ipsarum x et y in se continentium.

SOLUTIO

Quia variatio non ad x pertinere censetur, erit $\delta x = 0$ et variatio ipsius y, nempe δy, tanquam cognita spectatur. Hinc cum sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} .$$

Deinde ob $q = \frac{dp}{dx}$ erit

$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\,\delta p}{dx} ;$$

sumto autem elemento dx constante est $d\,\delta p = \frac{dd\,\delta y}{dx}$ hincque

$$\delta q = \frac{dd\,\delta y}{dx^2} \quad \text{et} \quad d\,\delta q = \frac{d^3 dy}{dx^2} .$$

Porro autem, cum sit $r = \frac{dq}{dx}$, erit

$$\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\,\delta q}{dx} \quad \text{ideoque} \quad \delta r = \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} ,$$

unde variationes quantitatum ex x et y derivatarum p, q, r, s etc. ita se habebunt

$$\delta p = \frac{d\,\delta y}{dx}, \quad \delta q = \frac{d^2\,\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = \frac{d^3\,\delta y}{dx^3}, \quad \delta s = \frac{d^4\,\delta y}{dx^4} \text{ etc.},$$

siquidem elementum dx pro constante assumatur.

COROLLARIUM 1

31. Haec differentialia primi altiorumque graduum variationis δy determinantur per variationes valorum ipsius y, qui conveniunt sequentibus valoribus ipsius x, scilicet $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$ etc. Si enim sequentes valores ipsius y ita exhibeantur: y', y'', y''', y'''' etc. eorumque variationes ita: $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, $\delta y''''$, ex natura differentialium novimus esse

$$\begin{aligned} d\,\delta y &= \delta y' - \delta y\ , \\ dd\,\delta y &= \delta y'' - 2\,\delta y' + \delta y\ , \\ d^3\,\delta y &= \delta y''' - 3\,\delta y'' + 3\,\delta y' - \delta y \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

COROLLARIUM 2

32. Si ergo solus valor y variationem pateretur, sequentes vero y', y'', y''' nulli essent obnoxiae, ut esset $\delta y' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta y''' = 0$ etc., foret

$$d\,\delta y = -\delta y\ , \quad dd\,\delta y = +\delta y\ , \quad d^3\,\delta y = -\delta y\ , \quad d^4\,\delta y = +\delta y \quad \text{etc.}$$

ideoque:

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx}\ , \quad \delta q = +\frac{\delta y}{dx^2}\ , \quad \delta r = -\frac{\delta y}{dx^3}\ , \quad \delta s = +\frac{\delta y}{dx^4} \quad \text{etc.}$$

PROBLEMA 2

33. Si V fuerit quantitas quomodocunque ex variabilibus x et y earumque differentialibus cuiuscunque ordinis conflata seu fi fuerit functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r, s etc., determinare eius variationem δV.

SOLUTIO

Differentietur more consueto haec functio V prodeatque

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \text{etc.}\ ,$$

quod differentiale nil aliud est, nisi incrementum, quod functio V capit, si loco quantitatum x, y, p, q, r, s etc. substituantur istae $x + dx$, $y + dy$, $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$ etc. Simili ergo modo, si pro x, y, p, q, r, s etc. substituantur

$$x + 0\ , \quad y + \delta y\ , \quad p + \delta p\ , \quad q + \delta q\ , \quad r + \delta r\ , \quad s + \delta s \quad \text{etc.},$$

incrementum, quod inde functio V capit, erit eius variatio

$$\delta V = N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + S\,\delta s + \text{etc.}$$

Quare, si pro δp, δq, δr etc. valores supra inventi scribantur, prodibit variatio quaesita

$$\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

THEOREMA 2

34. Proposita formula integrali quacunque $\int Zdx$ eius variatio aequalis est integrali variationis differentialis Zdx seu erit

$$\delta \int Zdx = \int \delta Zdx \ .$$

DEMONSTRATIO

Cum $\int Zdx$ exprimat summam omnium Zdx, eius variatio $\delta \int Zdx$ comprehendet summam omnium variationum ipsius Zdx seu erit $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$. Quod etiam hoc modo distinctius ostendi potest: sit $\int Zdx = V$, ita ut definiri oporteat δV; cum igitur sit $dV = Zdx$, erit $\delta dV = \delta Zdx = d\delta V$, unde sumtis integralibus fiet $\delta V = \int \delta Zdx$.

PROBLEMA 3

35. Proposita formula integrali $\int Zdx$, in qua Z quantitas quomodocunque ex ipsis x et y earumque differentialibus cuiuscunque ordinis conflata, investigare eius variationem $\delta \int Zdx$.

SOLUTIO

Cum ergo Z sit functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc., eius differentiale more consueto sumtum huiusmodi formam habebit

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \text{ etc.,}$$

unde eiusdem quantitatis Z variatio erit

$$\delta Z = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Cum nunc sit $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$, erit

$$\delta \int Zdx = \int N\delta y dx + \int Pd\delta y + \int \frac{Qdd\delta y}{dx} + \int \frac{Rd^3\delta y}{dx^2} + \text{etc. ;}$$

ne iam in ulteriori reductione expressio δy turbet, ponamus tantisper $\delta y = \omega$, et reductiones ita se habebunt

$$\int P d\omega = P\omega - \int \omega\, dP$$

$$\int \frac{Q dd\omega}{dx} = \frac{Q d\omega}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} d\omega = \frac{Q d\omega}{dx} - \frac{\omega dQ}{dx} + \int \frac{\omega ddQ}{dx}$$

$$\int \frac{R d^3\omega}{dx^2} = \frac{R dd\omega}{dx^2} - \frac{dR d\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \int \frac{\omega d^3 R}{dx^2}$$

etc.

Colligantur omnes isti valores et pro ω restituatur δy, sicque obtinebitur

$$\begin{aligned}\delta \int Z dx = \int \delta y dx \Big(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\Big)\\ + \delta y \Big(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d\delta y}{dx}\Big(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \frac{dd\delta y}{dx^2}\Big(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})\\ + \text{etc.},\end{aligned}$$

in qua expressione differentiale dx sumtum est constans.

COROLLARIUM 1

36. Constat ergo variatio formulae integralis $\int Z dx$ ex parte integrali

$$\int \delta y dx \Big(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\Big)$$

et partibus absolutis, quae praeter ipsam variationem δy etiam eius differentialia $d\delta y$, $dd\delta y$, $d^3\delta y$ etc. complectuntur.

COROLLARIUM 2

37. Partem autem integralem per reductiones adhibitas ita instruximus, ut tantum ipsam variationem δy complecteretur ab eiusque differentialibus immunis exhiberetur, quae forma in applicatione calculi variationum maximam praestat utilitatem.

PROBLEMA 4

38. Si in formula integrali $\int Z dx$ quantitas Z non solum litteras x et y cum relationibus differentialium p, q, r, s etc., sed etiam formulam integralem $\Pi = \int \Im\, dx$ utcunque complectatur, in qua autem sit $\Im$ functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc., definire variationem formulae illius integralis $\int Z dx$.

SOLUTIO

Cum quantitas Z praeter quantitates x, y, p, q, r, s etc. etiam formulam integralem $\Pi = \int \Im\, dx$ involvat, spectari poterit tanquam functio quantitatum Π, x, y, p, q, r, s etc., unde, si more solito differentietur, prodibit talis forma

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \quad \text{etc.},$$

unde colligitur variatio ipsius Z

$$\delta Z = L \delta\Pi + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s + \text{etc.}$$

Cum deinde sit $\Im$ functio ipsarum x, y, p, q, r, s etc., ponatur

$$d\Im = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \mathfrak{S} ds + \text{etc.}$$

atque ex praecedente problemate erit $\delta\Pi$ seu

$$\begin{aligned}
\delta \int \Im\, dx = \int \delta y\, dx \Big(& \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d\,d\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.} \Big) \\
& + \delta y \Big(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d\,d\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{etc.} \Big) \\
& + \frac{d\,\delta y}{dx} \Big(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d\,d\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{etc.} \Big) \\
& + \frac{d\,d\,\delta y}{dx^2} \Big(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{etc.} \Big) \\
& + \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} (\mathfrak{S} - \text{etc.}) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Vel sumatur potius prior forma

$$\delta \int \Im\, dx = \int \mathfrak{N}\, \delta y\, dx + \int \mathfrak{P}\, d\,\delta y + \int \frac{\mathfrak{Q}\, d\,d\,\delta y}{dx} + \int \frac{\mathfrak{R}\, d^3\,\delta y}{dx^2} + \int \frac{\mathfrak{S}\, d^4\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

eritque ob $\delta\Pi = \delta \int \Im\, dx$

$$\delta Z = L\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx + L\int \mathfrak{P}\,d\,\delta y + L\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\,\delta y}{dx} + L\int \frac{\mathfrak{R}\,d^3\,\delta y}{dx^2} + L\int \frac{\mathfrak{S}\,d^4\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$+ N\delta y + \frac{P\,d\,\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd\,\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\,\delta y}{dx^3} + \frac{S\,d^4\,\delta y}{dx^4} + \text{etc.}$$

Cum igitur sit $\delta\int Z\,dx = \int \delta Z\,dx$, habebimus:

$$\delta\int Z\,dx = \int L\,dx\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx + \int L\,dx\int \mathfrak{P}\,d\,\delta y +$$

$$+ \int L\,dx\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\,\delta y}{dx} + \int L\,dx\int \frac{\mathfrak{R}\,d^3\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$+ \int N\,\delta y\,dx + \int P\,d\,\delta y + \int \frac{Q\,dd\,\delta y}{dx} + \int \frac{R\,d^3\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur $\int L\,dx = W$, seu $L\,dx = dW$, et ob

$$\int L\,dx\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx = W\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx - \int \mathfrak{N}W\,\delta y\,dx$$

$$\int L\,dx\int \mathfrak{P}\,d\,\delta y = W\int \mathfrak{P}\,d\,\delta y - \int \mathfrak{P}W\,d\,\delta y$$

$$\int L\,dx\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\,\delta y}{dx} = W\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\,\delta y}{dx} - \int \frac{\mathfrak{Q}\,W\,dd\,\delta y}{dx}$$

obtinebimus:

$$\delta\int Z\,dx = W\int \mathfrak{N}\,\delta y\,dx + W\int \mathfrak{P}\,d\,\delta y + W\int \frac{\mathfrak{Q}\,dd\,\delta y}{dx} + W\int \frac{\mathfrak{R}\,d^3\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$+ \int (N - \mathfrak{N}W)\,\delta y\,dx + \int (P - \mathfrak{P}W)\,d\,\delta y$$

$$+ \int (Q - \mathfrak{Q}W)\,\frac{dd\,\delta y}{dx} + \int (R - \mathfrak{R}W)\,\frac{d^3\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Hae formulae eodem modo ut supra reductae dabunt:

$$\delta\int Z\,dx = W\int \delta y\,dx\left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ W\,\delta y\left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{W\,d\,\delta y}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{W\,dd\,\delta y}{dx^2}\,(\mathfrak{R} - \text{etc.})$$

$$+ \int \delta y dx \left((N - \mathfrak{N} W) - \frac{d(P - \mathfrak{P} W)}{dx} + \frac{dd(Q - \mathfrak{Q} W)}{dx^2} - \frac{d^3(R - \mathfrak{R} W)}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((P - \mathfrak{P} W) - \frac{d(Q - \mathfrak{Q} W)}{dx} + \frac{dd(R - \mathfrak{R} W)}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q - \mathfrak{Q} W) - \frac{d(R - \mathfrak{R} W)}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} \left((R - \mathfrak{R} W) - \text{etc.} \right)$$
$$+ \text{etc.}$$

COROLLARIUM 1

39. Quia reductiones adhibitae quovis casu facile expediri possunt, iis praetermissis variatio quaesita hoc modo succinctius exhibitur posito $W = \int L dx$:

$$\delta \int Z dx = W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \frac{\mathfrak{P} d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \int dx \left((N - \mathfrak{N} W) \delta y + (P - \mathfrak{P} W) \frac{d\delta y}{dx} + (Q - \mathfrak{Q} W) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R - \mathfrak{R} W) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

COROLLARIUM 2

40. Ac si quantitas Z involvat insuper aliam formulam integralem $\Pi' = \int \Im' dx$, ut sit:

$$dZ = L d\Pi + L d\Pi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.},$$

tum vero:

$$d\Im' = \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.},$$

si ponatur $\int L dx = W$, $\int L' dx = W'$ insuperque ad abbreviandum:

$$N - \mathfrak{N} W - \mathfrak{N}' W' = (N); \quad P - \mathfrak{P} W - \mathfrak{P}' W' = (P)$$
$$Q - \mathfrak{Q} W - \mathfrak{Q}' W' = (Q); \quad R - \mathfrak{R} W - \mathfrak{R}' W' = (R) \quad \text{etc.},$$

erit variatio quaesita:

$$\delta \int Z dx = W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ W' \int dx \left(\mathfrak{N}' \delta y + \mathfrak{P}' \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}' \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}' \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \int dx \left((N) \delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

PROBLEMA 5

41. Si in formula $\int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. involvat formulam integralem $\Pi = \int \Im dx$, in qua quantitas $\Im$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. insuper complectatur formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z} dx$, ubi $\mathfrak{z}$ autem sit functio solarum litterarum x, y, p, q, r etc., invenire variationem formulae $\int Z dx$.

SOLUTIO

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \Im dx$, eius differentiale more consueto sumtum erit huius formae:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

ideoque eius variatio

$$\delta Z = L \delta\Pi + N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

unde variatio quaesita erit

$$\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$$

$$= \int L dx \, \delta\Pi + \int dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

At cum sit $\Im$ functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\pi = \int \mathfrak{z} dx$, erit differentiando:

$$d\Im = \mathfrak{Q} d\pi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

hincque variatio eius

$$\delta\Im = \mathfrak{Q} \delta\pi + \mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

quare, cum sit $\Pi = \int \Im dx$, erit $\delta\Pi = \delta \int \Im dx = \int \delta\Im dx$ ac propterea:

$$\delta\Pi = \int \mathfrak{Q} dx \, \delta\pi + \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

unde reperitur:

$$\int L dx \, \delta\Pi = \int L dx \int \mathfrak{Q} dx \, \delta\pi + \int L dx \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Superest ergo ut definiamus $\delta\pi$; est autem $\pi = \int \mathfrak{z} dx$, et quia $\mathfrak{z}$ est functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum, fiat differentiando:

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m} dx + \mathfrak{n} dy + \mathfrak{p} dp + \mathfrak{q} dq + \mathfrak{r} dr + \text{etc.},$$

ex quo concluditur eius variatio:

$$\delta\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\ ,$$

tum vero ob $\delta\pi = \delta\int \mathfrak{z}\,dx = \int \delta\mathfrak{z}\,dx$ erit:

$$\delta\pi = \int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

Quamobrem habebimus

$$\int L dx \int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi = \int L dx \int \mathfrak{L}\,dx \int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

Ut iam hanc formulam a signis integralibus multiplicatis liberemus, ponamus $\int L dx = W$ eritque:

$$\int L dx\,\delta\Pi = W\,\delta\Pi - \int W\,d\,\delta\Pi\ ,$$

verum $d\,\delta\Pi = \delta\mathfrak{Z}\,dx$, unde

$$\int L dx\,\delta\Pi = W\,\delta\Pi - \int W\,\delta\mathfrak{Z}\,dx$$

ideoque:

$$\int L dx\,\delta\Pi = W\int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi + W\int dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

$$- \int \mathfrak{L}\,W dx\,\delta\pi - \int W dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).$$

Sit $\int \mathfrak{L}\,dx = \mathfrak{W}$, erit

$$\int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\,\delta\pi - \int \mathfrak{W}\,\delta\mathfrak{z}\,dx$$

hincque:

$$\int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

$$- \int \mathfrak{W}\,dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

Porro ponatur $\int \mathfrak{L}\,W dx = \int W d\mathfrak{W} = \mathfrak{V}$, ut sit:

$$\int \mathfrak{L}\,W dx\,\delta\pi = \mathfrak{V}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

$$- \int \mathfrak{V}\,dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

Ex his omnibus colligetur variatio quaesita $\delta \int Z dx$

$$\begin{aligned}
&= (W\mathfrak{W} - \mathfrak{V}) \int dx \left(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
&\quad - W \int \mathfrak{W} dx \left(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + \int \mathfrak{V} dx \left(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + W \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
&\quad - \int W dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + \int dx \left(N\delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) .
\end{aligned}$$

COROLLARIUM 1

42. Si quaeratur variatio formulae $\int Z dx$ a valore $x = 0$ usque ad valorem determinatum $x = a$, sumantur integralia $W = \int L dx$, $\mathfrak{W} = \int \mathfrak{L} dx$ et $\mathfrak{V} = \int W d\mathfrak{W}$, ita ut evanescant posito $x = 0$, tum vero facto $x = a$ fiat $W = A$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{V} = \mathfrak{B}$, quos valores in formula inventa loco litterarum W, $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{V}$, ubi extra signum integrale occurrunt, ponere licebit.

COROLLARIUM 2

43. Ponatur ergo ad abbreviandum:

$$\begin{aligned}
&N + (A - W)\mathfrak{N} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{n} = (N) \\
&P + (A - W)\mathfrak{P} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{p} = (P) \\
&Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{q} = (Q) \\
&R + (A - W)\mathfrak{R} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{V})\mathfrak{r} = (R) \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

et variatio quaesita formulae $\int Z dx$ usque ad valorem determinatum $x = a$ erit:

$$\int dx \left((N)\,\delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) .$$

COROLLARIUM 3

44. Quodsi iam hic reductiones superiores adhibeantur, reperietur eadem variatio ita expressa:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y\Big((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \delta y\,\Big((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d\,\delta y}{dx}\Big((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{dd\,\delta y}{dx^2}\,((R) - \text{etc.})\\ + \text{etc.}\end{aligned}$$

COROLLARIUM 4

45. Cum sit $\mathfrak{V} = \int W\,d\mathfrak{W}$, erit $A\,\mathfrak{W} - \mathfrak{V} = \int (A - W)\,\mathfrak{Q}\,dx$; quare, si ponatur integrale $\int (A - W)\,\mathfrak{Q}\,dx = X$, ita sumtum, ut evanescat posito $x = 0$, tum vero facto $x = a$ fiat $X = B$, ita ut sit:

$$\begin{aligned}\int \mathfrak{Q}\,dx &= W, \quad \text{et posito} \quad x = a \quad \text{fiat} \quad W = A\,,\\ \int (A - W)\,\mathfrak{Q}\,dx &= X, \quad \text{et posito} \quad x = a \quad \text{fiat} \quad X = B\,,\end{aligned}$$

superiores valores Corollario 2 exhibiti ita se habebunt:

$$\begin{aligned}N + (A - W)\,\mathfrak{N} + (B - X)\,\mathfrak{n} &= (N)\\ P + (A - W)\,\mathfrak{P} + (B - X)\,\mathfrak{p} &= (P)\\ Q + (A - W)\,\mathfrak{Q} + (B - X)\,\mathfrak{q} &= (Q)\\ R + (A - W)\,\mathfrak{R} + (B - X)\,\mathfrak{r} &= (R)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

PROBLEMA 6

46. Si in formula integrali $\Phi = \int Z\,dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. etiam ipsam formulam integralem Φ involvat, determinare eius variationem $\delta\Phi = \delta\int Z\,dx$.

SOLUTIO

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. insuperque ipsam formulam integralem $\Phi = \int Z\,dx$ involvat, differentietur more solito ac prodeat

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

Hinc igitur erit variatio ipsius Z scilicet

$$\delta Z = L\,\delta\Phi + N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ideoque ob $\delta\Phi = \delta\int Z dx = \int \delta Z dx$

$$\delta\Phi = \int L dx\,\delta\Phi + \int dx\left(N\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

Ponamus $\delta\Phi = z$, cum sit id ipsum, quod quaeritur, et brevitatis gratia

$$\int dx\left(N\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right) = u\ ,$$

ut habeatur $z = \int L z dx + u$ et differentiando $dz = Lzdx + du$, eritque integrando

$$z = e^{\int L dx}\int e^{-\int L dx}\,du\ ;$$

statuatur brevitatis gratia $\int L dx = W$ et habebitur variatio quaesita

$$\delta\int Z dx = e^W\int e^{-W} dx\left(N\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).$$

Si desideretur variatio usque ad datum terminum $x = a$ fiatque tum $W = A$, ponatur ad abbreviandum

$$e^{A-W}N = (N)\ , \quad e^{A-W}P = (P)\ , \quad e^{A-W}Q = (Q) \quad \text{etc.}$$

eritque reductionibus ut supra factis variatio

$$\begin{aligned}\delta\int Z dx = \int dx\,\delta y\Big((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \ \delta y\Big((P) - \frac{d(Q)}{dz} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \frac{d\,\delta y}{dx}\Big((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \frac{dd\,\delta y}{dx^2}((R) - \text{etc.})\\ + \text{etc.}\end{aligned}$$

COROLLARIUM

47. Si ergo quantitas varianda Φ definiatur per hanc aequationem differentialem $d\Phi = Z dx$, in qua Z involvat utcunque ipsam quantitatem Φ et insuper litteras x, y, p, q, r etc., eius variatio $\delta\Phi$ per hoc problema assignari poterit.

PROBLEMA 7

48. Si in formula integrali $\Phi = \int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. non solum ipsam quantitatem Φ, sed insuper adhuc aliam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ quomodocunque implicet, in qua autem quantitas $\mathfrak{Z}$ tantum per litteras x, y, p, q, r etc. detur, investigare variationem huius formulae $\delta\Phi = \delta \int Z dx = \int \delta Z dx$.

SOLUTIO

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. insuperque formularum $\Phi = \int Z dx$ et $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, praebeat ea differentiando

$$dZ = K d\Phi + L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.},$$

unde eius variatio erit

$$\delta Z = K \delta\Phi + L \delta\Pi + N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Porro autem, cum $\mathfrak{Z}$ sit functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum, ponatur

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

eritque ob $\delta\Pi = \int \delta\mathfrak{Z} dx$

$$\delta\Pi = \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Ponatur ut ante

$$\delta\Phi = z \quad \text{et} \quad L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} = u\ ;$$

ob $\delta\Phi = \int \delta Z dx = z$ erit $\delta Z = \frac{dz}{dx}$ ideoque $\frac{dz}{dx} = Kz + u$; unde oritur

$$z = e^{\int K dx} \int e^{-\int K dx} u dx = \delta\Phi\ ;$$

sit $\int K dx = V$, eritque

$$e^{-\int K dx} u dx = e^{-V} L dx \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$
$$+ e^{-V} dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

statuatur porro $\int e^{-V} L dx = W$, eritque integrando variatio quaesita

$$\delta\Phi = e^V W \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- e^V \int W dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ e^V \int e^{-V} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).$$

Si variatio usque ad datum terminum $x = a$ desideretur ac posito $x = a$ fiat $V = A$ et $W = B$, tum statuatur brevitatis gratia:

$$e^{A-V}N + e^A(B - W)\,\mathfrak{N} = (N)$$
$$e^{A-V}P + e^A(B - W)\,\mathfrak{P} = (P)$$
$$e^{A-V}Q + e^A(B - W)\,\mathfrak{Q} = (Q)$$
$$e^{A-V}R + e^A(B - W)\,\mathfrak{R} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

quo facto erit variatio formulae $\Phi = \int Z dx$ usque ad terminum $x = a$ extensa:

$$\delta\Phi = \int dx\,\delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R) - \text{etc.}\right)$$

COROLLARIUM

49. Sic ergo variatio definitur quantitatis Φ per aequationem differentialem $d\Phi = Z dx$ datae, in qua Z non solum praeter litteras x, y, p, q, r etc. ipsam Φ, sed insuper formulam integralem $\int \Im\, dx = \Pi$ utcunque involvit, dummodo $\Im$ per solas litteras x, y, p, q, r etc. determinetur.

PROBLEMA 8

50. Si in formula integrali $\Phi = \int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. formulam integralem $\Pi = \int \Im\, dx$ involvat, hic autem quantitas $\Im$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. ipsam formulam integralem $\Pi = \int \Im\, dx$ contineat, definire variationem formulae propositae $\Phi = \int Z dx$.

SOLUTIO

Cum Z sit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et ipsius $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, eius differentiale erit huiusmodi:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

hinc eius variatio erit

$$\delta Z = L\,\delta\Pi + N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

ex quo ob $\delta\Phi = \int \delta Z dx$ habebitur:

$$\delta\Phi = \int L dx\,\delta\Pi + \int dx\left(N\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).$$

At quia $\mathfrak{Z}$ est functio ipsarum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, sit eius differentiale:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L} d\Pi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \text{etc.}$$

eritque

$$\delta\mathfrak{Z} = \frac{d\,\delta\Pi}{dx} = \mathfrak{L}\,\delta\Pi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur $\int \mathfrak{L} dx = \mathfrak{W}$, eritque:

$$\delta\Pi = e^{\mathfrak{W}} \int e^{-\mathfrak{W}} dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Fiat $\int e^{\mathfrak{W}} L dx = W$ et obtinebitur:

$$\begin{aligned}\delta\Phi = {} & W\int e^{-\mathfrak{W}} dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)\\ & - \int e^{-\mathfrak{W}} W dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)\\ & + \int dx\left(N dy + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Si hanc variationem ad terminum $x = a$ usque extendi oporteat ac posito $x = a$ fiat $W = A$, vocetur brevitatis gratia

$$\begin{aligned} N + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\,\mathfrak{N} &= (N)\\ P + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\,\mathfrak{P} &= (P)\\ Q + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\,\mathfrak{Q} &= (Q)\end{aligned}$$

etc.

eritque reductiones supra expositas introducendo variatio formulae integralis $\Phi = \int Z dx$ ad terminum $x = a$ extensa

$$\delta \int Z dx = \int dx\, \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{(dR)}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R) - \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

SCHOLION

51. Usus huius problematis cernitur in descensu corporum super lineis curvis in medio quocunque resistente, dum corpora a viribus quibuscunque sollicitantur, si variationem temporis descensus definire velimus, dum curva quomodocunque variatur. Denotet hoc casu Φ tempus descensus per arcum, qui abscissae x respondeat, sitque applicata $= y$ et Π altitudo celeritati acquisitae debita; ac tempus descensus erit

$$\Phi = \int \frac{dx \sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{\Pi}}$$

posito $dy = pdx$, ut $dx \sqrt{(1 + pp)}$ elementum arcus designet. Verum ex sollicitationibus erit

$$d\Pi = X dx + Y dy - V \sqrt{(dx^2 + dy^2)} ,$$

ubi X et Y significant functiones ipsarum x et y, et V functionem ipsius Π, cui resistentia est proportionalis. Erit ergo ob $dy = pdx$

$$\Pi = \int (X + Yp - V \sqrt{(1 + pp)})\, dx$$

ideoque

$$3 = X + Yp - V \sqrt{(1 + pp)}$$

existente $Z = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{\Pi}}$.

COROLLARIUM

52. Si ad similitudinem valorum (N), (P), (Q) ponatur

$$M + e^{-\mathfrak{M}}(A - W)\, \mathfrak{M} = (M) ,$$

erit $(M)dx + (N)dy + (P)dp + (Q)dq + (R)dr +$ etc., differentiale verum huius formulae:

$$Z + e^{-\mathfrak{M}}(A - W)\mathfrak{Z}.$$

CONCLUSIO

53. Quaecunque ergo formula integralis $\Phi = \int Z dx$ proponatur, cuius variationem investigari oporteat, eius variatio usque ad terminum $x = a$ extensa semper exprimetur hoc modo

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int dx\,\delta y \Big(&(N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \text{etc.}\Big) \\ &+ \delta y \quad \Big((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \text{etc.}\Big) \\ &+ \frac{d\delta y}{dx}\Big((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \text{etc.}\Big) \\ &+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\Big((R) - \frac{d(S)}{dx} + \text{etc.}\Big) \\ &+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}\,((S) - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

sumto elemento dx constante. Quemodmodum autem litterae (N), (P), (Q), (R), (S) etc. se habeant, id quovis casu patebit.

CASUS I

54. Si $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds$ etc., erit

$$(N) = N\ ,\quad (P) = P\ ,\quad (Q) = Q\ ,\quad (R) = R\ ,\quad (S) = S\quad \text{etc.}$$

CASUS II

55. Si $dZ = LdH + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc, existente $H = \int \mathfrak{Z} dx$ et

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.}\ ,$$

sit $\int L dx = W$ ac posito $x = a$ fiat $W = A$, quo facto erit:

$$\begin{aligned}(N) &= N + (A - W)\,\mathfrak{N} & (P) &= P + (A - W)\,\mathfrak{P} \\ (Q) &= Q + (A - W)\,\mathfrak{Q} & (R) &= R + (A - W)\,\mathfrak{R} \\ (S) &= S + (A - W)\,\mathfrak{S} & &\text{etc.}\end{aligned}$$

CASUS III

56. Si fuerit

$$dZ = L d\Pi + L' d\Pi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

existente $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ et $\Pi' = \int \mathfrak{Z}' dx$, tum vero:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{Z} &= \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.} \\ d\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ponatur $\int L dx = W$ et $\int L' dx = W'$, ac facto $x = a$ fiat $W = A$ et $W' = A'$, quo facto erit:

$$\begin{aligned} (N) &= N + (A - W)\,\mathfrak{N} + (A' - W')\,\mathfrak{N}' \\ (P) &= P + (A - W)\,\mathfrak{P} + (A' - W')\,\mathfrak{P}' \\ (Q) &= Q + (A - W)\,\mathfrak{Q} + (A' - W')\,\mathfrak{Q}' \\ (R) &= R + (A - W)\,\mathfrak{R} + (A' - W')\,\mathfrak{R}' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

CASUS IV

57. Si Z contineat formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, ut sit:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

quantitas $\mathfrak{Z}$ vero formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z} dx$, ut sit:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L} d\pi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.},$$

at $\mathfrak{z}$ nullum porro integrale involvat, ita ut sit:

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m} dx + \mathfrak{n} dy + \mathfrak{p} dp + \mathfrak{q} dq + \mathfrak{r} dr + \text{etc.}$$

Ponatur $\int L dx = W$ et posito $x = a$ fiat $W = A$; tum vero ponatur $\int (A - W)\,\mathfrak{L} dx = \mathfrak{W}$ casuque $x = a$ fiat $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$, quo facto erit:

$$\begin{aligned} (N) &= N + (A - W)\,\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\,\mathfrak{n} \\ (P) &= P + (A - W)\,\mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\,\mathfrak{p} \\ (Q) &= Q + (A - W)\,\mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\,\mathfrak{q} \\ (R) &= R + (A - W)\,\mathfrak{R} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\,\mathfrak{r} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

CASUS V

58. Si Z contineat ipsam formulam $\Phi = \int Z dx$, ut sit:

$$dZ = K d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

ponatur $\int K dx = V$ et facto $x = a$ sit $V = C$, erit:

$$(N) = e^{C-V} N\ , \quad (P) = e^{C-V} P\ , \quad (Q) = e^{C-V} Q\ , \quad (R) = e^{C-V} R \quad \text{etc.}$$

CASUS VI

59. Si Z praeter formulam $\Phi = \int Z dx$ contineat aliam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, sitque:

$$dZ = K d\Phi + L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

tum vero $\mathfrak{Z}$ nullam formulam integralem involvat:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

sit $\int K dx = V$ et posito $x = a$ fiat $V = C$. Deinde sit $\int e^{C-V} L dx = W$ et posito $x = a$ fiat $W = A$, eritque:

$$\begin{aligned} (N) &= e^{C-V} N + (A - W)\,\mathfrak{N} \\ (P) &= e^{C-V} P + (A - W)\,\mathfrak{P} \\ (Q) &= e^{C-V} Q + (A - W)\,\mathfrak{Q} \\ (R) &= e^{C-V} R + (A - W)\,\mathfrak{R} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

CASUS VII

60. Si Z contineat formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, ut sit:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

tum vero $\mathfrak{Z}$ denuo eandem formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ involvat, ut sit:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L} d\Pi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

Ponatur $\int \mathfrak{L} dx = \mathfrak{W}$ et posito $x = a$ fiat $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$; deinde ponatur

$$\int e^{-\mathfrak{A}+\mathfrak{W}} L dx = W$$

et posito $x = a$ fiat $W = A$, eritque

$$(N) = N + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}(A - W)\,\mathfrak{N}$$
$$(P) = P + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}(A - W)\,\mathfrak{P}$$
$$(Q) = Q + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}(A - W)\,\mathfrak{Q}$$
$$(R) = R + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}(A - W)\,\mathfrak{R}$$
$$\text{etc.}$$

61. Simili modo hanc investigationem ad alias formulas complicatas extendere licet, verum cum tales vix unquam occurrere soleant, labor superfluus foret. Cum igitur formularum integralium tam simpliciorum quam magis compositarum variationes definire docuerim, calculus variationum fere penitus absolutus videtur; quomodocunque enim quantitas varianda fuerit, tam ex formulis absolutis quam integralibus conflata, ope differentiationis ordinariae eius variatio reperiri poterit. Veluti si quantitas varianda U contineat formulas integrales quascunque

$$\Phi = \int Z\,dx\ , \quad \Phi' = \int Z'\,dx\ , \quad \Phi'' = \int Z''\,dx \quad \text{etc.}\ ,$$

differentietur ea more solito prodeatque:

$$\delta U = K\,d\Phi + K'\,d\Phi' + K''\,d\Phi'' \quad \text{etc.}\ ,$$

tum evidens est fore eius variationem:

$$\delta U = K\,\delta\Phi + K'\,\delta\Phi' + K''\,\delta\Phi'' \quad \text{etc.}\ ,$$

at variationes $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, $\delta\Phi''$ etc. per praecepta modo exposita assignabuntur. Simul vero patet variationem δU semper huiusmodi forma expressum iri, ut sit:

$$\delta V = \int (A)\,dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\frac{d\,\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\ ,$$

ubi (A), (B), (C) etc. sunt functiones ex regulis supra traditis inveniendae. Istius autem calculi variationum usum in solutione celeberrimi problematis isoperimetrici, latissima significatione accepti, breviter indicari conveniet.

APPLICATIO CALCULI VARIATIONUM AD SOLUTIONEM PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI LATISSIMA SIGNIFICATIONE ACCEPTI

62. Problema primarium huc spectans ita enunciari potest, ut inter omnes curvas super eadem data basi $x = a$ extruendas ea definiatur, pro qua formula quaepiam U maximum minimumve valorem obtineat. Etsi enim

enunciatio problematis curvas tantum eiusdem longitudinis complectitur, tamen haec conditio commode, ut eius ambitus latius pateat, omittitur neque etiam commemoratione unicae formulae U, cuius valor maximus minimusve evadere debet, eius vis restringi est censenda, postquam in genere demonstravi: si inter omnes curvas super eadem basi $x = a$ extruendas, pro quibus formula V eundem nanciscatur valorem, definiri debeat ea, in qua valor formulae U maximus evadat minimusve, quaestionem huc reduci, ut inter omnes plane curvas super basi $x = a$ extruendas ea definiatur, pro qua haec formula composita $\alpha V + \beta U$ consequatur maximum minimumve valorem. Interim tamen et huius reductionis ratio ex ipsis calculi variationum principiis dilucide explicari potest.

63. Quaestio autem haec a consideratione linearum curvarum remota hoc modo proponi potest:

Proposita formula quacunque U definire eam relationem inter binas variabiles x et y, per quam si valor ipsius U determinetur atque a valore $x = 0$ usque ad valorem $x = a$ extendatur, is proditurus sit sive maximus sive minimus.

Spectemus ergo relationem inter x et y tanquam iam inventam, ita ut inde oriatur valor ipsius U maximus vel minimus; atque manifestum est, si relatio inter x et y infinite parum immutetur, nullam inde mutationem in valore ipsius U nasci debere; seu, quod eodem redit, variationem ipsius U seu δU nihilo aequalem esse oportere; sicque aequatio $\delta U = 0$ relationem quaesitam inter x et y complectetur.

64. Variationem autem δU inde definire docuimus, quod pro quovis valore ipsius x valorem ipsius y, qui ipsi vi relationis quaesitae competeret, particula quapiam δy augeri assumsimus. Cum igitur relatio quaesita inter omnes plane possibiles hac praerogativa gaudere debeat, variatio δU semper esse debet nihilo aequalis, quomodocunque singuli valores ipsius y talibus particulis δy augeantur et quomodocunque haec augmenta fuerint comparata, quoniam prorsus sunt arbitraria neque ullo modo a se invicem pendentia. Neque etiam opus est, ut omnibus valoribus ipsius y huiusmodi variationes tribuantur, sed sive unicus quispiam sive duo sive quotcunque pro lubitu varientur, semper aeque necesse est, ut variatio, quae inde in totum valorem ipsius U, quatenus is a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ extenditur, redundat, in nihilum abeat.

65. Ex iis autem, quae supra sunt tradita, manifestum est variationem ipsius U semper hoc modo exprimi, ut sit:

$$\delta U = \int (A)dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\frac{d\,\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\,\delta y}{dx^2} \text{ etc.},$$

cuius formae singulas partes seorsim considerari convenit. At praeter primum membrum integrale reliquae partes $(B)\,\delta y$, $(C)\frac{d\,\delta y}{dx}$ etc. tantum a variatione ultimi valoris y, qui valori $x = a$ convenit, pendent neque rationem variationis praecedentium implicant; ut enim tota variatio ipsius U obtineatur, in expressione inventa ubique statui debet $x = a$, quod in singulis partibus praeter primam actu fieri potest, sicque in iis δy denotabit variationem, quae soli ultimo valori ipsius y tribuitur et quae omnino est arbitraria neque a praecedentibus pendet. Unde perspicuum est, nisi membrum integrale adesset, ex reliquis partibus nihil plane pro relatione inter x et y concludi posse.

66. Verum membrum integrale $\int (A)dx\,\delta y$ etiam variationes, quae omnibus praecedentibus valoribus ipsius y tribuuntur, involvit, dum continet summam omnium elementorum $(A)dx\,\delta y$ ex variatione singulorum valorum y oriundorum. Ita, si unicus eius valor ipsi x, quasi determinatum valorem haberet, spectato respondens varietur seu particula δy augeatur, membrum illud integrale tantum esset $= (A)dx\,\delta y$ nihilque summandum haberetur; sin autem insuper sequens valor y' ipsi $x + dx$ respondens particula $\delta y'$ augeatur positoque $x + dx$ loco x functio (A) abeat in $(A)'$, membrum integrale constabit his duabus partibus:

$$(A)dx\,\delta y + (A)'dx\,\delta y' .$$

Simili modo, si tres pluresve valores successivi y, y', y'', y''', y'''' etc. particulis δy, $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ etc. augeantur, membrum integrale aequivalebit huic expressioni:

$$(A)dx\,\delta y + (A)'dx\,\delta y' + (A)''dx\,\delta y'' + (A)'''dx\,\delta y''' + \text{etc.}$$

quae series tam retrorsum usque ad terminum $x = 0$ quam antrorsum usque ad terminum $x = a$ continuata concipi potest.

67. Etsi igitur variatio δU ad terminum determinatum $x = a$ adstringitur, tamen ob membrum integrale omnes variationes intermedias complectitur; unde, si pro reliquis partibus absolutis, quae tantum ad terminum

ultimum $x = a$ referuntur, brevitatis gratia scribamus I, variatio δU ita erit expressa, ut sit:

$$\delta U = (A)dx\,\delta y + (A)'dx\,\delta y' + (A)''dx\,\delta y'' + (A)'''dx\,\delta y''' + \text{etc.} + I\ ,$$

quae, ut problemati satisfiat, nihilo aequari debet. Cum autem variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. non a se invicem pendeant, sed singulae mere sint arbitrariae, illa annihilatio locum habere nequit, nisi singulae partes sigillatim evanescant; ex quo necesse est, ut sit:

$$(A) = 0\ ,\quad (A)' = 0\ ,\quad (A)'' = 0\ ,\quad (A)''' = 0\quad \text{etc.}\ ,$$

quae aequatiunculae omnes in hac una indefinita $(A) = 0$ continentur seu, quicunque valor ipsi x tribuatur, perpetuo esse oportet $(A) = 0$, hacque aequatione relatio quaesita inter x et y continetur.

68. En igitur solutionem facilem problematis propositi, quo ea relatio inter x et y requiritur, ex qua pro formula praescripta U, postquam eius valor a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ fuerit extensus, maximus minimusve valor resultet. Quaeratur scilicet variatio formulae U pariter a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extensa, quae per praecepta supra tradita huiusmodi formam habere debet:

$$\delta U = \int (A)dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\frac{d\,\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\ ,$$

hincque ex solo membro integrali $\int (A)dx\,\delta y$ relatio inter x et y quaesita ita definietur, ut sit $(A) = 0$, reliquae autem partes, quia ultimum tantum valorem ipsius y afficiunt, nihil conferunt ad relationem indefinitam inter x et y, quae desideratur.

69. Istae tamen partes posteriores relationi inventae magis determinandae inservire possunt; eatenus enim tantum huiusmodi partes accedunt, quatenus in membro integrali $\int (A)dx\,\delta y$ functio (A) differentialium rationem $\frac{dy}{dx} = p$ vel etiam rationes differentialium superiorum, nempe $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc. involvit. Quando autem hoc usu venit, aequatio $(A) = 0$ erit differentialis vel primi vel etiam altioris gradus; sicque relatio quaesita inter x et y post unam pluresve demum integrationes reperitur. Cum autem quaelibet integratio quantitatem constantem arbitrariam invehat, hoc modo ad aequationem finitam vagam pervenietur atque nunc nova quaestio existet, quomodo has constantes arbitrarias determinari oporteat, ut valor ipsius U omnium maximus

minimusve prodeat. Cum enim quaelibet illarum constantium determinatio iam per se maximi minimive proprietate sit praedita, hic porro vel maximum maximorum vel minimum minimorum investigandum relinquitur.

70. Ad hoc igitur novum problema accessorium resolvendum partes illae a signo integrali immunes adhiberi poterunt. Constantes scilicet per integrationes invectas ita determinari conveniet, ut posito $x = a$ coefficientes ipsarum $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{dd\delta y}{dx^2}$ etc. singuli seorsim evanescant, sive ut hoc casu satisfiat his conditionibus:

$$(B) = 0 \ , \quad (C) = 0 \ , \quad (D) = 0 \quad \text{etc.}$$

Deinde, quia ambos terminos $x = 0$, et $x = a$ inter se permutare licet, etiam posito $x = 0$ efficiendum erit, ut fiat $(\mathrm{B}) = 0$, $(C) = 0$, $(D) = 0$ etc. Etsi enim partes, quae hoc exigant, in nostra expressione non continentur, tamen eae in membro integrali contineri sunt censendae.

71. Ex iisdem principiis etiam problemata, quae ad methodum relativam retuli, solvi possunt; haec autem problemata ita generaliter enunciare licet:

Inter omnes relationes, quibus y per x definitur, quae hac communi gaudent proprietate, ut pro formula $\mathfrak{U}$ *posito* $x = a$ *eundem valorem exhibeant, determinare eam relationem, ex qua formula* U, *siquidem a termino* $x = 0$ *usque ad terminum* $x = a$ *extendatur, maximum vel minimum consequatur valorem.*

Hic igitur variationes, quae singulis valoribus ipsius y tribuuntur, non omnes sunt arbitrariae, sed ita statuendae sunt, ut fiat $\delta\mathfrak{U} = 0$, siquidem eius valor a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extendatur. Tum vero etiam natura maximi minimive postulat, ut secundum eandem extensionem sit ut ante $\delta U = 0$.

72. Per methodum ergo ante expositam tam formulae $\mathfrak{U}$, quae debet esse communis, quam formulae U, quae maxima fieri debet vel minima, quaeratur variatio a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ extendenda; atque relatio quaesita inter x et y ex coniunctione harum duarum aequationum $\delta\mathfrak{U} = 0$ et $\delta U = 0$ erit investiganda. At hae variationes ita expressae reperientur:

$$\delta\mathfrak{U} = \int (\mathfrak{A}) dx\, \delta y + (\mathfrak{B})\, \delta y + (\mathfrak{C}) \frac{d\delta y}{dx} + (\mathfrak{D}) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$\delta U = \int (A) dx\, \delta y + (B)\, \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \ ,$$

ubi de membris a signo integrali liberis eadem sunt tenenda, quae supra iam observavi; ideoque relationem inter x et y quaesitam tantum ex membris integralibus derivari oportebit.

73. Hinc itaque binas sequentes consequemur aequationes:

$$(\mathfrak{A})\,\delta y + (\mathfrak{A})'\,\delta y' + (\mathfrak{A})''\,\delta y'' + (\mathfrak{A})'''\,\delta y''' + \text{etc.} = 0$$
$$(A)\,\delta y + (A)'\,\delta y' + (A)''\,\delta y'' + (A)'''\,\delta y''' + \text{etc.} = 0\ ,$$

quarum priore assumtio variationum δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. conditioni communi praescriptae conveniens definitur, quae deinde in alteram introducta relationem quaesitam manifestabit. Omnes ergo variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. praeter unam ut arbitrariae spectari possunt, quippe quae una ex priori aequatione est definienda. Iam vero evidens est, postquam una ita fuerit sumta, ut priori aequationi satisfiat, tum simul alteri satisfactum iri, si statuatur $(A) = n(\mathfrak{A})$, sumendo pro n quantitatem quamcunque constantem.

74. Problema igitur propositum hac resolvetur aequatione:

$$\alpha(A) + \beta(\mathfrak{A}) = 0$$

sumtis pro α et β quantitatibus quibusvis constantibus. Eadem autem solutio prodiisset, si inter omnes omnino relationes inter x et y ea exquiri debuisset, unde formula $\alpha U + \beta\mathfrak{U}$ maximum minimumve valorem impetraret; ex quo simul intelligitur binas formulas $\mathfrak{U}$ et U propositas inter se permutari posse eaque omnia, quae in Tractatu meo annotavi, hinc multo magis fiunt perspicua. Simili enim modo res se habebit, si non una formula $\mathfrak{U}$, sed plures debeant esse communes; sicque stabilito *Calculo variationum* omnia huius generis problemata facillime et brevissime expediuntur.

ANALYTICA EXPLICATIO METHODI MAXIMORUM ET MINIMORUM

Commentatio 297 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10 (1764), 1766, p. 94—134
Summarium ibidem p. 9—13

SUMMARIUM

vide p. 141—143 huius voluminis

1. Quae vulgo in elementis de methodo maximorum et minimorum tradi solent, ea in functionibus unius cuiuspiam quantitatis variabilis potissimum consumuntur, ita ut proposita functione quacunque V, quae utcunque ex quantitate variabili z et constantibus fuerit composita, eas variabilis z determinationes investigari oporteat, quae functioni V maximum minimumve valorem inducant. Interdum etiam functiones duarum pluriumve variabilium z, y, x considerantur valoresque iis singulis assignandi quaeruntur, quibus functio maximum vel minimum valorem consequatur. Methodus autem, qua huius posterioris generis quaestiones resolvuntur, prorsus convenit cum ea, quae in genere priori adhibetur; si enim plures implicentur variabiles, successive unica tanquam variabilis spectatur eiusque valor pro maximo minimove producendo idoneus indagatur; quae operatio si per singulas variabiles fuerit instituta, omnium valores innotescunt, quibus valor functionis propositae vel maximus vel minimus reddatur.

2. Haud aliter res se habet, si proponatur functio duarum variabilium x et y quaeraturque valor ipsi y tribuendus, ut, cum pro x data quantitas a fuerit posita, ipsa functio maximum minimumve valorem impetret; statim enim ubique pro x scribatur a, et quaestio manifesto ad primum genus erit reducta. Verum si illa functio variabilium x et y non fuerit evoluta, sed per integrationem determinetur, quaestiones ad genus omnino diversum erunt referendae methodumque solvendi longe diversam requirunt. Veluti si Z fuerit functio quaecunque ipsarum x et y ac proponatur formula integralis $\int Z dx$, quaestionem ita enunciari conveniet: *Definire relationem inter binas variabiles x et y, ut valor istius formulae, postquam posuerimus $a = x$, fiat omnium maximus vel minimus.*

3. Quantum inter huiusmodi quaestiones et eas, quas ad prius genus retuli, intersit, ad sequentia momenta vel leviter attendenti mox patebit. Sit enim V functio evoluta ipsarum x et y, pro qua investigari debeat valor ipsius y, ut posito $x = a$ valor functionis V evadat maximus minimusve; atque ad hanc quaestionem solvendam statim poni potest $x = a$, quo facto valor ipsius y per methodum priorem ita determinabitur, ut non pendeat a valore indefinito ipsius x. At proposita formula integrali $\int Z dx$ non in formula differentiali $Z dx$, sed demum post integrationem ipsi x valorem illum determinatum a tribuere licet; neque, ut tum formulae $\int Z dx$ valor evadat maximus minimusve, valor quidam determinatus pro y sumendus negotium conficit, sed relatio quaedam inter x et y assignari debet; propterea quod, etiamsi post integrationem ponatur $x = a$, tamen valor integralis $\int Z dx$ a relatione indefinita, quae inter z et y intercedit, pendeat et per omnes valores medios ipsius y determinetur.

4. Verum tales quaestiones circa formulam $\int Z dx$ maximam minimamve reddendam multo latius patent neque tantum ad casus, quibus Z est functio ipsarum x et y, restringuntur, sed pro Z assumi potest expressio quaecunque, quae relatione quapiam inter x et y assumta determinetur. Hinc Z involvere poterit praeter ipsas variabiles x et y etiam relationem differentialium earum, neque solum primi ordinis, sed etiam altiorum ordinum quorumcunque; scilicet si hae differentialium rationes ita exprimantur, ut sit

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r \text{ etc.},$$

quantitas Z spectari poterit ut functio quaecunque omnium harum x, y, p, q, r etc. Quin etiam quantitas Z praeterea in se complecti potest novas formulas integrales utcunque in ea involutas; unde plura genera huiusmodi quaestionum nascuntur, ad quae methodus solvendi accommodari debet.

5. Huiusmodi problemata primum occasione famosi illius Problematis Isoperimetrici a IACOBO BERNOULLIO olim in summum Analyseos incrementum agitati[1]) tractari sunt coepta, quod arduum negotium etsi mira sagacitate a Viro illo acutissimo est expeditum, tamen methodus ab eo adhibita tantum ad casus, quibus quantitas Z praeter x et y solum earum differentialia prima seu litteram p involvebat, extendebatur et quovis casu singulari quasi ex

1) Cf. IACOBI BERNOULLI commentationem: *Analysis magni problematis isoperimetrici*, Opera No. XCVI, p. 897. C. C.

considerationibus geometricis repeti debebat. Postquam autem in uberiori huius argumenti enodatione diu desudassem, methodum tandem maxime generalem sum adeptus, cuius ope omnia huiusmodi problemata, quibus quantitas Z non solum differentialia cuiusque ordinis sed etiam formulas integrales quascunque in se contineret, resolvi possunt, quam methodum libro singulari ample sum persecutus.

6. Etsi autem haec methodus ita est comparata, ut eius applicatio nullas figuras geometricas requirat, tamen ipsa istius methodi investigatio ex contemplatione linearum curvarum est petita, quam ob causam mihi etiam tum non satis naturalis est visa. Cum enim haec quaestio, qua relatio inter x et y quaeritur, ut formula integralis $\int Z dx$ posito post integrationem $x = a$ maximum minimumve valorem obtineat, sine ullo respectu ad geometriam proponi possit, solutio etiam adaequata et ex veris principiis deducta ab omni geometrica consideratione immunis esse debere videtur. Quod desiderium cum in meo tractatu non obscure essem testatus, Vir quidam Clarissimus et in arte Analytica versatissimus DE LA GRANGE TOURNIER litteris Taurini ad me datis nunciavit se huius voti compotem esse factum simulque fundamenta suae Analyseos mecum benevole communicavit. Quae cum plurimum in recessu habere videantur, meo more explicanda et uberius excolenda statui.

7. Consideremus igitur in genere formulam integralem $\int Z dx$, in qua sit Z functio utcunque per x et y composita, quae etiam rationem differentialium non solum primi sed etiam superiorum ordinum involvat ac praeterea quoque unam pluresve formulas integrales complectatur. Pro eius autem determinatione assumamus integrale ita capi, ut evanescat posito $x = 0$; tum vero post integrationem tribuamus ipsi x valorem quendam datum $x = a$, sitque A valor, quem formula integralis tum recipit. Iam quaestio in hoc versatur, ut definiri debeat ea relatio inter x et y, ex qua per istas operationes maximus vel minimus valor pro A obtineatur. Hanc igitur relationem inter x et y, quae quaesito satisfaciat, aequatione quadam sive finita sive differentiali cuiuscunque ordinis exprimi oportet, quae simulac fuerit inventa, problema pro soluto erit habendum.

8. Ponamus, uti in Analysi fieri solet, hanc relationem inter x et y, quae quaeritur, iam constare, ita ut, quicunque valor definitus pro x assumatur, inde y quoque ac proinde etiam functio Z valorem determinatum adipiscatur. Concipiantur hoc modo successive pro x omnes possibiles valores a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ substitui, qui intervallis infinite

parvis dx progrediantur, tum vero valores ipsius Z, qui his singulis valoribus ipsius x respondent, per dx multiplicari, haecque omnia producta in unam summam collecta eam quantitatem, quam littera A indicavimus, constituent, quae maxima vel minima esse debet. Quod ita est intelligendum, ut, si ex alia relatione inter x et y quacunque singulis valoribus ipsius x alii valores ipsi y hincque ipsi Z conveniant, ex iis pro A, si fuerit maximum, valor certe minor, sin autem fuerit minimum, certe maior sit proditurus, quam si iusta relatio inter x et y fuisset adhibita.

9. Quodsi autem hae variationes, quae singulis valoribus ipsius y inducuntur, infinite parvae concipiantur, tum per indolem maximorum et minimorum inde nulla mutatio in quantitatem A redundare debet; atque ex hoc ipso fonte determinatio maximorum et minimorum peti solet. Cum scilicet valoribus ipsius y pro arbitrio variationes infinite parvas tribuerimus, mutatio, quae inde in valoribus omnibus ipsius Zdx ac proinde in eorum summa tota A oritur, calculo colligi debet, quae deinceps nihilo aequalis posita praebebit aequationem, in qua natura maximi minimive ideoque quaesita relatio inter x et y continebitur. Hac igitur operatione methodus huiusmodi maxima vel minima investigandi absolvitur, quae idcirco iisdem principiis atque vulgaris methodus maximorum ac minimorum innititur; quae quomodo per sola Analyseos praecepta, sine ullis ex Geometria petitis subsidiis, institui possit, accuratius perpendamus, quandoquidem hoc idem negotium principiis geometricis innixus iam satis prospero successu sum executus.

10. Cum igitur variationes infinite parvae singulis valoribus ipsius y inductae nullam mutationem in valore quantitatis A producere debeant hocque fieri oporteat, utcunque illae variationes accipiantur, dummodo fuerint infinite parvae, sufficiet in unico tantum quodam valore ipsius y huiusmodi variationem concipere et mutationem, quae inde in quantitate A oritur, evanescentem reddere, ex quo fonte etiam universa mea methodus maximorum et minimorum est petita. Verum etiamsi pluribus valoribus ipsius y, quin etiam plane omnibus, huismodi variationes infinite parvae quaecunque inducantur, nihilominus natura maximorum et minimorum exigit, ut mutatio, quam quantitas A inde adipiscitur, ad nihilum redigatur, atque hoc usu venire debet, utcunque illae variationes, quippe quae omnes mere sunt arbitrariae, assumantur.

11. Sed quoniam in mea praecedente solutione unicum quendam valorem ipsius y variationem infinite parvam accipere posui, dum reliqui omnes immutati manerent, in hoc principium continuitatis vim patiebatur haecque

praecipua erat causa, quod tota investigatio per sola Analyseos praecepta expediri nequiverit, sed contemplatio figurae geometricae, in qua valores ipsius y per applicatas lineae curvae repraesentarentur, in subsidium vocari debuerit, quo inde variationes, quas ratio differentialium cuiusque ordinis subiret, commodius elici possent. Quamobrem, ne nimis principio continuitatis adversemur, quo applicatio praeceptorum mere Analyticorum impediebatur, singulis valoribus ipsius y variationes infinite parvas tribuamus, quae tamen ita sint indefinitae, ut singulae deinceps ad libitum determinari atque adeo omnes praeter unam ad nihilum redigi possint, quo pacto ad solutiones meas priores devolvamur necesse est.

12. Cum autem nunc non solum uni valori ipsius y, sed innumerabilibus quin plane omnibus variationes infinite parvas quidem, sed tamen arbitrarias, tribuimus, dubium est nullum, quin haec methodus multo latius pateat quam praecedens, atque ad solutionem plurium aliorum problematum manuducat, ad quae prior methodus vel difficilius vel etiam frustra adhiberetur. Si enim illae variationes certo quodam modo determinentur, quaestione ad Geometriam translata huiusmodi problemata resolvi poterunt, in quibus non inter omnes plane lineas curvas, sed tantum eas numero quidem infinitas, quae sub certa quadam specie comprehendantur, ea debeat assignari, quae maximi minimive cuiuspiam proprietate sit praedita. Tales autem quaestiones plerumque plurimum difficultatis implicare deprehenduntur; verum praeterea hinc adhuc plura incrementa in Analysi merito expectare licet.

13. Cum igitur hic singulis valoribus ipsius y variationes infinite parvas tribuamus, duplicem statum formulae $\int Z dx$ consideramus, in quorum altero singuli valores ipsius y sint ii ipsi, quos quaesita relatio inter x et y requirit, in altero autem iidem valores variati contineantur; priorem statum distinctionis causa *principalem*, alterum vero statum *variatum* appellabo. Natura ergo maximorum et minimorum postulat, ut differentia inter hos duos status evanescat. Quemadmodum igitur in statu principali valor ipsius y quicunque, dum variabilis x differentiali dx crescere sumitur, incrementum dy capere censetur, ita manente x, dum a statu principali ad statum variatum progredimur, valorem ipsius y elemento δy augeri statuamus; unde discrimen inter has duas expressiones differentiales dy et δy probe notetur. Dum autem singulis valoribus ipsius y, transitu ad statum variatum facto, huiusmodi incrementa δy tribuimus, ea tanquam plane indeterminata neque ullo modo ab ipsis valoribus ipsius y pendentia sunt spectanda.

14. His positis indagari debet, quantum incrementum quaecunque functio Z pro quolibet valore ipsius x, dum a statu principali ad variatum transfertur, capiat; quod incrementum a sola variatione ipsius y, quatenus hac translatione elemento δy augetur, proficiscitur. Indicemus hoc incrementum per δZ, ita ut valor ipsius Z a statu principali ad variatum translatus sit $= Z + \delta Z$; ac primo statim patet, si functio Z a sola variabili x penderet neque alteram y implicaret, fore $\delta Z = 0$; neque igitur variabilis x, utcunque ea in formationem functionis Z ingrediatur, quicquam ad δZ conferet, sed eius valor a solo elemento δy, quo variabilis y crescere concipitur, resultat. Hic autem, prout Z vel solas quantitates finitas x et y vel etiam earum differentialium rationem vel adeo formulas integrales involvit, ita diversi casus erunt examinandi.

15. Ponamus ergo primo functionem Z tantum ipsas quantitates finitas x et y involvere, ita ut neque ratio differentialium neque ullae formulae integrales in eam ingrediantur atque ad eius variationem δZ definiendam in functione Z ubique loco y scribi oportet $y + \delta y$, relicto x invariato, sicque prodibit valor variatus $Z + \delta Z$, a quo si principalis Z subtrahatur, remanebit variatio δZ. Manifestum ergo est hanc variationem obtineri, si functio Z more solito differentietur posita sola y variabili, dummodo pro dy scribatur δy. Quare, si differentiatione more solito instituta sumta utraque quantitate x et y variabili fuerit

$$dZ = M\,dx + N\,dy\ ,$$

erit pro translatione a statu principali ad variatum

$$\delta Z = N\,\delta y\ ;$$

haec ergo variatio reperitur, si in differentiali ordinario pro dx scribatur 0, pro dy autem δy; hocque modo casum primum facillime expedivimus.

16. Videamus autem porro, quomodo pro hoc casu primo, quo Z est functio ipsarum x et y tantum, formulae integralis $\int Z\,dx$ valor maximus vel minimus inveniri queat. Cum igitur pro quovis valore ipsius x functio Z crescat elemento $N\,\delta y$ ideoque $Z\,dx$ particula $N\,dx\,\delta y$, summa omnium harum particularum a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ dabit variationem ipsius A, quae si ponatur δA, erit

$$\delta A = \int N\,dx\,\delta y\ ;$$

quae expressio cum debeat evanescere, quamcunque legem variationes δy teneant, necesse est, ut pro singulis valoribus ipsius x sit

$$N = 0\ .$$

Haec ergo aequatio exprimit relationem inter x et y quaesitam, ex qua formula $\int Z dx$ adipiscitur valorem vel maximum vel minimum; neque haec proprietas tantum locum habebit casu praescripto $x = a$, sed etiam, quicunque alius valor ipsi x tribuatur.

17. Complectatur secundo functio Z praeter x et y etiam rationem differentialium primorum, seu posito $\frac{dy}{dx} = p$ sit Z functio quaecunque quantitatum x, y et p, qua more solito differentiata prodeat

$$dZ = M dx + N dy + P dp .$$

Hinc igitur quaeri debet variatio ipsius Z, dum a statu principali in statum variatum transfertur, qua translatione quantitas x manet eadem, y vero augetur elemento δy, elementum autem, quo quantitas p crescit, sit δp. Cum autem sit $p = \frac{dy}{dx}$, si in statu principali valorem ipsius y, qui ipsi $x + dx$ respondet, per y' indicemus, erit $p = \frac{y' - y}{dx}$; crescat iam in translatione in situm variatum y elemento δy et y' elemento $\delta y'$, eritque

$$\delta p = \frac{\delta y' - \delta y}{dx} .$$

At $\delta y' - \delta y$ exprimit incrementum ipsius δy, dum x crescit differentiali dx, ita ut sit

$$\delta y' - \delta y = d\,\delta y ;$$

tum vero etiam $\delta y' - \delta y$ spectari potest ut variatio ipsius $y' - y = dy$, dum in statum variatum progredimur, sicque erit quoque

$$\delta y' - \delta y = \delta dy ;$$

unde perficitur esse

$$d\,\delta y = \delta dy \quad \text{ideoque} \quad \delta p = \frac{d\,\delta y}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} .$$

18. Simili autem modo, si Z praeter x et y etiam differentialia superiorum ordinum involvat, ut positis

$$\frac{dy}{dx} = p , \quad \frac{dp}{dx} = q , \quad \frac{dq}{dx} = r \text{ etc.}$$

sit Z functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r etc. et more solito differentiando

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ etc.} ,$$

incrementa quantitatum q, r etc., dum a statu principali in variatum transferuntur, determinantur. Nam ob $q = \frac{dp}{dx}$ erit

$$\delta q = \frac{\delta p' - \delta p}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{\delta dp} \quad \text{pariterque} \quad \delta r = \frac{d\delta q}{dx} = \frac{\delta dq}{dx} \quad \text{etc.}$$

Verum ex superioribus est

$$d\delta p = \frac{dd\delta y}{dx} = \frac{d\delta dy}{dx} \quad \text{et} \quad \delta dp = \frac{\delta ddy}{dx},$$

ita ut sit:

$$\delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2} = \frac{d\delta dy}{dx^2} = \frac{\delta ddy}{dx^2},$$

eodem vero modo perspicitur fore:

$$\delta r = \frac{ddd\delta y}{dx^3} = \frac{dd\delta dy}{dx^3} = \frac{d\delta ddy}{dx^3} = \frac{\delta dddy}{dx^3},$$

quarum formularum specie diversarum aequalitas probe est tenenda.

19. Dum igitur functio Z ex statu principali in variatum transit, quia quantitas x incrementum nullum capit, y vero incrementum δy, tum quantitas p incrementum $\frac{d\delta y}{dx}$, quantitas q incrementum $\frac{dd\delta y}{dx^2}$, quantitas r incrementum $\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc., ipsius functionis Z incrementum huic translationi conveniens reperietur per ordinariam differentiationem ponendo

$$dx = 0, \quad dy = \delta y, \quad dp = \frac{d\delta y}{dx}, \quad dq = \frac{dd\delta y}{dx^2}, \quad dr = \frac{ddd\delta y}{dx^3} \quad \text{etc.},$$

unde id erit:

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{ddd\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

Hincque ergo variatio functionis Z pro quovis ipsius x valore definiri poterit; quae forma adhuc magis illustrabitur, si, quemadmodum est

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr \quad \text{etc.},$$

observetur esse oportere ob $\delta x = 0$

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

tum vero esse ob $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc.

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = \frac{ddd\delta y}{dx^3}.$$

20. Cum ergo translatione in statum variatum functio Z incrementum capiat δZ, ipsa formula $\int Z dx$ incrementum nanciscetur $\int \delta Z dx$, quod itaque erit:

$$\int dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{ddd\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

in quo si post integrationem ponatur $x = a$, obtinebitur variatio ipsius A seu δA, quae nihilo aequalis posita inducet quantitati A valorem maximum seu minimum. In hac autem integratione non amplius ad transitum in statum variatum respicitur, sed ea per omnia incrementa ipsius x extendi debet, cum denotet summam omnium variationum singulis valoribus ipsius x a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ convenientium. Ne igitur ratio differentialium per δ indicatorum turbet, pro δy scribatur ω, ita ut ω exhibeat quantitatem infinite parvam arbitrariam utcunque ab x pendentem; ac superius incrementum nihilo aequandum erit:

$$\int dx \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{dd\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

21. Perspicuum est in his differentialibus superioribus elementum dx assumi constans; quia enim posuimus

$$\frac{d\delta p}{dx} \quad \text{seu} \quad d\frac{\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$$

ob $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$, aperte dx constans est assumtum. Hoc ergo observato, si singulas partes integralis inventi seorsim integremus, habebimus:

$$\int dx \cdot N\omega = \int N\omega\, dx$$

$$\int dx \cdot P\frac{d\omega}{dx} = \int P\, d\omega = P\omega - \int \omega\, dP$$

$$\int dx \cdot Q\frac{dd\omega}{dx^2} = \int \frac{Q dd\omega}{dx} = \frac{Qd\omega}{dx} - \frac{\omega dQ}{dx} + \int \frac{\omega ddQ}{dx}$$

$$\int dx \cdot R\frac{d^3\omega}{dx^3} = \int \frac{Rd^3\omega}{dx^2} = \frac{Rdd\omega}{dz^2} - \frac{dRd\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \int \frac{\omega d^3R}{dx^2}$$

etc.

Hinc itaque variatio quaesita partim ex membris integralibus, partim ex absolutis constabit, eritque:

$$\int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} \right) + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.} \right) + \frac{dd\omega}{dx^2} (R - \text{etc.})$$

22. Restituamus δy pro ω, ac formulae integralis $\int Z dx$, existente

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \text{ etc.}$$

et

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx}, \quad s = \frac{dr}{dx} \text{ etc.},$$

incrementum, dum in statum quemcunque variatum transfertur, quod hoc modo $\delta \int Z\, dx$ exprimere licet, ita se habebit:

$$\begin{aligned}
&\int dx\, \delta y \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right) \\
&+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right) \\
&+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right) \\
&+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right) \\
&+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.}) \\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}$$

in quibus formulis, quatenus differentialia superiorum graduum involvunt, differentiale dx constans est assumtum. At δy pro singulis valoribus ipsius x valorem habet arbitrarium.

23. Si igitur pro valore $x = a$ formula $\int Z dx$ maxima vel minima fieri debeat, incrementum modo inventum, si in eo statuatur $x = a$, nihilo aequale poni oportet hocque ita, ut semper evanescat, quomodocunque variationes δy assumantur. Quare etiam, si talis variatio unico cuipiam valori y, qui convenit valori cuicunque ipsius x minori quam a, tribuatur, expressio inventa in nihilum abire debet. Tum autem nulla mutatio inde valoribus ultimis ipsius y, qui ipsi $x = a$ respondent, inducuntur; quare, cum posito $x = a$ pars incrementi absoluta

$$\begin{aligned}
&\delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right) + \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right) \\
&\qquad + \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

tantum ab ultimorum ipsius y valorum variatione pendeat, pro iis erit

$$\delta y = 0\,, \quad d\delta y = 0\,, \quad dd\delta y = 0 \quad \text{etc.}$$

sicque haec pars sponte evanescit. Ex quo necesse est, ut sola pars integralis seorsim nihilo aequalis reddatur indeque fieri debeat:

$$\int dx\, \delta y \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} \right) = 0 \ .$$

24. Haec autem expressio summam omnium variationum, quae ex singulorum ipsius y variationibus nascuntur, complectitur; sed quia talis mutatio in unico valore fieri concipitur, tota summa ad hanc unam variationem reducitur, reliquis omnibus evanescentibus; quare necesse est, ut pro hoc casu sit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0 \ .$$

Quoniam vero, in quocunque loco haec variatio fieri concipiatur, natura maximi minimive aeque hanc annihilationem postulat, necesse est, ut pro omnibus valoribus ipsius x sit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0 \ ;$$

quae ergo aequatio continet relationem indefinitam inter x et y, qua efficitur, ut inde oriundus valor formulae integralis $\int Z dx$ fiat maximus vel minimus posito $x = a$, unde patet hanc relationem non ab ista quantitate a pendere.

25. Haec iam est eadem aequatio, quam pro solutione eiusdem problematis olim in Tractatu meo de Maximis ac Minimis dedi, nunc autem ex meris principiis analyticis derivavi; quod negotium ideo commode successit, quod singulis valoribus ipsius y variationes accedere assumsi, quibus in statum variatum transferantur. Deinde vero reductio formularum integralium paragrapho 21 facta negotium penitus confecit, qua illae ita fuerunt in partes resolutae, ut aliae a signo summatorio $\int$ essent liberae, quae autem eo manserunt adstrictae, eae tantum ipsam variationem $\omega = \delta y$ sine eius differentialibus involverent; quo ipso hoc commodi sumus nacti, ut, cum quaelibet variatio seorsim ad nihilum perduci debeat, formula integralis statim praebuerit aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0 \ ,$$

qua indefinite relatio inter x et y exprimeretur, reliquae vero incrementi partes absolutae, utpote ad ultimos tantum ipsius y valores pertinentes, non in computum venirent.

26. Neque tamen hae partes absolutae frustra sunt inventae, sed singularem praestant usum, ad quem methodus mea prior, quae tantum aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

suppeditavit, minus est accommodata; quam ob causam haec methodus illi longe est anteferenda. Quem usum quo clarius exponam, sit primo Z functio tantum ipsarum x et y, earum differentialia non involvens, ita ut sit $dZ = M\,dx + N\,dy$, existentibus $P = 0$, $Q = 0$ etc., ac manifestum est hoc casu partes absolutas sponte evanescere, atque adeo problema perfecte esse solutum, statim ac fecerimus $N = 0$. Ita, si

$$\left(bb - nxy + \frac{y^3}{c}\right) dx$$

debeat esse maximum vel minimum, ob

$$N = -nx + \frac{3yy}{c}$$

quaestioni satisfit statuendo $yy = \frac{1}{3}ncx$, neque hic quicquam ultra determinandum superest.

27. At si Z praeterea involvat $p = \frac{dy}{dx}$, ut sit

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp\ ,$$

tum, ut $\int Z\,dx$ fiat maximum vel minimum, utique necesse est, sit $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Verum, quia haec aequatio est differentialis atque adeo differentio-differentialis, si functio P ipsam quantitatem $p = \frac{dy}{dx}$ involvat, integratio eius unam vel duas constantes arbitrarias accipiet neque propterea relatio inter x et y penitus determinabitur. Observavi igitur iam in meo tractatu hanc relationem maximo minimove convenientem ita praeterea ad lubitum definiri posse, ut posito $x = a$ altera variabilis y datum valorem obtineat, ac si illa aequatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$ fuerit differentialis secundi gradus, insuper unam determinationem arbitrio nostro relinqui. His igitur casibus conditioni maximi vel minimi adhuc alia conditio ad valores extremos ipsius y pertinens adiungi potest.

28. Porro igitur quaeri potest, cum his casibus relatio inter x et y non penitus determinetur eaque adhuc infinitis modis exhiberi queat, quinam prae

omnibus reliquis maximum minimumve producat. Hoc vero colligere poterimus ex parte incrementi absoluta ante neglecta, quae hoc casu est $P\delta y$; cuius igitur valor, quem induit posito $x = a$, etiam evanescere debet. Atque hinc in genere intelligimus, si $\int Z dx$ debeat esse maximum vel minimum existente

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \quad \text{etc.} ,$$

aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

ita ulterius determinari debere, ut posito $x = a$ sequentibus satisfiat aequationibus:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d\,dR}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \text{etc.} = 0 , \quad Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} = 0 ,$$

$$R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} = 0 , \quad S - \text{etc.} = 0 \quad \text{etc.}$$

29. Quia exemplo haec clariora evadent, quaeratur relatio inter x et y, ut posito $x = a$ haec formula

$$\int \frac{dx \sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{y}} \quad \text{existente} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

maximum minimumve obtineat valorem. Cum ergo sit

$$Z = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{y}} ,$$

erit

$$M = 0 , \quad N = -\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{2y\sqrt{y}} \quad \text{et} \quad P = \frac{p}{\sqrt{y(1 + pp)}}$$

sicque primo adimplenda est haec aequatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$ seu $N dx - dP = 0$, quae per p multiplicata dat $N dy = p dP$. At ob $M = 0$ est

$$dZ = N dy + P dp \quad \text{ideoque} \quad dZ = p dP + P dp ,$$

quae integrata praebet

$$Z = Pp + C \quad \text{seu} \quad \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{y(1 + pp)}} + C ,$$

hoc est

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + pp)}} = C = \frac{1}{\sqrt{b}} .$$

Hinc porro nanciscimur

$$b = y(1 + pp) \quad \text{et} \quad p = \sqrt{\frac{b - y}{y}} = \frac{dy}{dx},$$

ita ut sit

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(by - yy)}}$$

et integrando

$$x = c - \sqrt{(by - yy)} + bA \sin \frac{2\sqrt{(by - yy)}}{b}.$$

Verum ad pleniorem determinationem debet esse $P = 0$ posito $x = a$, hoc est $p = 0$ et $y = b$; unde positis $x = a$ et $y = b$ constans c ita definitur, ut sit $c = a - \pi b$. Ac si velimus, ut posito $x = 0$ fiat et $y = 0$, debet esse $b = \frac{a}{\pi}$.

30. Antequam hanc investigationem analyticam ad casus, quibus functio Z etiam formulas integrales in se complectitur, accommodemus, ipsam Analysin, qua hactenus sumus usi, diligentius examinemus ac momenta, quibus innititur, accuratius perpendamus. Versatur autem haec Analysis circa duas variabiles x et y, quae partim ad statum, quem vocavi principalem, partim ad statum variatum referuntur, ita ut earum altera x ad utrumque statum aeque pertineat, altera vero y, dum a statu principali ad variatum transfertur, incrementum capiat δy, dum autem in eodem statu ad valorem $x + dx$ promovetur, augmentum differentiale consuetum dy accipiat; hinc si variabilis y simul a statu principali in variatum et locum ipsi $x + dx$ respondentem promoveatur, augmentum eius erit $dy + \delta y$. Cum autem x ad utrumque statum aeque referatur, erit $\delta x = 0$.

31. Si iam habeatur alia quaecunque functio V ad locum x in statu principali relata eaque in eodem statu ad locum $x + dx$ promoveatur, eius incrementum, quod ei accedet, more solito per dV exprimamus. Sin autem ea, manente valore ipsius x eodem, e statu principali in variatum proferatur, eius augmentum novo more per δV exponamus. Quodsi iam functio illa V sit ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. utcunque composita, litterae autem p, q, r etc. eiusmodi quantitates designent, quarum utraque incrementa

$$dp, \quad dq, \quad dr \text{ etc.} \quad \text{et} \quad \delta p, \quad \delta q, \quad \delta r \text{ etc.}$$

exhiberi queant, hinc consueto differentiandi modo etiam ambo incrementa

functionis V assignari poterunt. Si enim fuerit pro translatione a loco x ad locum $x + dx$ in eodem statu ex differentiatione consueta

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}\ ,$$

erit pro translatione a statu principali in variatum, eodem vero loco x existente, uti notavimus, $\delta x = 0$,

$$\delta V = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r \quad \text{etc.}$$

32. Deinde, si haec duplicis generis differentialia inter se permisceantur, ex superioribus iam constat esse

$$\delta dV = d\,\delta V\ .$$

Hinc si V iam sit differentiale formae dV, erit

$$\delta ddU = d\,\delta dU = dd\,\delta U\ , \quad \text{ob} \quad \delta dU = d\,\delta V$$

atque in genere, quocunque ordine bina differentiationis signa d et δ fuerint constituta, eorum ordo pro lubitu permutari potest salva significatione; sic erit

$$\delta d^3V = d\,\delta d^2V = d^2\,\delta dV = d^3\,\delta V\ .$$

Quia autem hic unicum statum variatum consideramus, ad quem transitus signo δ indicatur, hoc signum nunquam plus quam semel in huiusmodi compositionibus inesse potest; semper autem e re est signum δ in talibus formulis in ultimum promovere.

33. Eadem permutatio quoque ad signa integralia extenditur; si enim proponatur formula integralis $\int V$, denotante $\int$ summam omnium valorum in eodem statu, qui omnibus valoribus ipsius x respondent, sumtorum, erit etiam

$$\delta \int V = \int \delta V\ ,$$

id quod per se est perspicuum, cum incrementum translatitium totius summae aequale sit summae omnium incrementorum elementarium in eadem translatione existentium. Atque ex hoc ipso fonte superior Analysis est deducta; nam cum proposita esset formula integralis $\int Z\,dx$, cuius variatio in statum variatum erat definienda, assumsimus esse

$$\delta \int Z\,dx = \int \delta(Z\,dx) = \int \delta Z \cdot dx\ ,$$

quia

$$\delta(Z\,dx) = \delta Z\,dx + Z\,\delta dx\ ,$$

est vero $\delta dx = 0$, uti $\delta x = 0$. Quin etiam, si occurreret integratio geminata $\int\int V$, foret eodem modo

$$\delta \int\int V = \int \delta \int V = \int\int \delta V \ .$$

34. Alterum artificium in transformatione integralium [consistit], quando post signum integrale signa d et δ invicem coniunguntur, ut saltem in integratione signum δ solitarium relinquatur. Ita proposita formula integrali $\int V \delta dv$ ob $\delta dv = d\delta v$, considerando δv uti quantitatem simplicem, erit

$$\int V \delta dv = \int V d\delta v = V\delta v - \int \delta v dV \ .$$

Eodemque porro modo perspicitur fore:

$$\begin{aligned}
\int V dd\delta v &= Vd\delta v - \delta v dV + \int \delta v ddV \\
\int V d^3\delta v &= Vdd\delta v - d\delta v dV + \delta v ddV - \int \delta v d^3 V \\
\int V d^4\delta v &= Vd^3\delta v - d^2\delta v dV + d\delta v ddV - \delta v d^3 V + \int \delta v d^4 V \\
&\qquad \text{etc.,}
\end{aligned}$$

est enim

$$\int V dd\delta v = Vd\delta v - \int d\delta v dV \ ,$$

at est

$$\int d\delta v dV = \delta v dV - \int \delta v ddV \ ,$$

unde ratio harum transformationum perspicitur.

35. His regulis analyticis praemissis non erit difficile omnes quaestiones huiusmodi circa maxima et minima resolvere, etiamsi in formula $\int Z dx$ functio Z formulas integrales quascunque in se contineat. Totum negotium scilicet huc redit, ut incrementum $\delta \int Z dx$, quod formula proposita $\int Z dx$, dum a statu principali in variatum transfertur, accipit, definiatur; quippe quod nihilo aequale positum solutionem maximi minimive continebit. Vocabo autem hoc incrementum *variationem differentialem* formulae $\int Z dx$, quae oriri intelligenda est, si singuli valores ipsius y particulis infinite parvis δy iisque arbitrariis augeantur. Tum vero hanc variationem per omnes valores ipsius x a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ extendi debere perspicuum est, pro cuius completa determinatione observandum est eam ita sumi oportere, ut posito $x = 0$ ea evanescat. Hinc igitur sequentia problemata ope huius methodi resolvamus, circa quae tenendum est litteras p, q, r, s etc. rationem differentialium binarum variabilium x et y ita involvere, ut sit

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx}, \quad s = \frac{dr}{dx} \quad \text{etc.}$$

PROBLEMA 1

Si Z sit functio quaecunque variabilium x et y quantitatumque earum differentialia involventium p, q, r, s etc., ita ut eius differentiale sit huiusmodi:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \text{etc.},$$

invenire variationem differentialem formulae integralis $\int Z\,dx$ a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extensam.

SOLUTIO

Quaeri ergo debet $\delta \int Z\,dx$, et cum sit $\delta \int Z\,dx = \int \delta Z\,dx$, habebimus statim ob $\delta x = 0$

$$\delta Z = N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + S\,\delta s + \text{etc.}$$

Est vero sumto differentiali dx constante

$$\delta p = \frac{\delta\,dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx}$$
$$\delta q = \frac{\delta\,dp}{dx} = \frac{d\,\delta p}{dx} = \frac{dd\,\delta y}{dx^2}$$
$$\delta r = \frac{\delta\,dq}{dx} = \frac{d\,\delta q}{dx} = \frac{d^3\,\delta y}{dx^3}$$
$$\delta s = \frac{\delta\,dr}{dx} = \frac{d\,\delta r}{dx} = \frac{d^4\,\delta y}{dx^4},$$

unde obtinebimus:

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + S\frac{d^4\,\delta y}{dx^4} + \text{etc.}$$

Iam pro integratione formulae $\int \delta Z\,dx$, per partes instituenda vidimus esse

$$\int N\delta y\,dx = \int \delta y\,dx \cdot N$$
$$\int P\,d\delta y = P\delta y - \int \delta y\,dP$$
$$\int Q\frac{dd\,\delta y}{dx} = Q\frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx}\,dQ + \int \frac{\delta y}{dx}\,ddQ$$
$$\int R\frac{d^3\,\delta y}{dx^2} = R\frac{dd\,\delta y}{dx^2} - \frac{d\,\delta y}{dx^2}\,dR + \frac{\delta y}{dx^2}\,ddR - \int \frac{\delta y}{dx^2}\,d^3R$$
$$\int S\frac{d^4\,\delta y}{dx^3} = S\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} - \frac{dd\,\delta y}{dx^3}\,dS + \frac{d\,\delta y}{dx^3}\,ddS - \frac{\delta y}{dx^3}\,d^3S - \int \frac{\delta y}{dx^3}\,d^4S$$
etc.

Ex his ergo colligitur variatio differentialis quaesita:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\,dx = {} & \int \delta y\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)\\ & + \delta y\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)\\ & + \frac{d\,\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{dd\,\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right)\\ & + \frac{d^3\delta y}{dx^3}\,(S - \text{etc.})\\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

ubi pars prima integralis a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extendi debet, quae ergo omnes variationes intermedias complectitur; in reliquis autem partibus absolutis statim ponere licet $x = a$, et δy denotabit incrementum extremi valoris ipsius y; at $d\,\delta y$, $dd\,\delta y$ etc. pendebunt insuper ab incrementis valorum contiguorum.

COROLLARIUM 1

Si ergo formula integralis $\int Z\,dx$ debeat esse maximum vel minimum pro termino $x = a$, necesse est, ut eius variatio differentialis evanescat, quomodocunque variationes δy accipiantur. Primum ergo oportet, sit pro omnibus valoribus intermediis ipsius x

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0\ ,$$

qua aequatione relatio requisita inter x et y continetur.

COROLLARIUM 2

Hinc autem, si termini P, Q, R etc. adsint, ob integrationes instituendas relatio inter x et y non penitus determinatur, quia in eam per singulas integrationes constantes quantitates arbitrariae ingrediuntur. His igitur casibus ad quaestionem maximi vel minimi aliae nonnullae conditiones adiungi possunt, veluti ut pro datis quibusdam valoribus ipsius x altera variabilis y datos valores obtineat.

COROLLARIUM 3

Omissis autem huiusmodi conditionibus nova quaestio formari potest, quemadmodum constantes illae per integrationem introductae definiri debeant,

ut vel maximum maximorum vel minimum minimorum obtineatur: pro hoc autem necesse est, ut posito $x = a$ his aequationibus satisfiat:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} = 0$$
$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$$
$$R - \frac{dS}{dx} = 0$$
$$S = 0 .$$

COROLLARIUM 4

Deinde vero ob easdem rationes opus est, ut pro altero termino $x = 0$ iisdem hisce aequationibus satisfiat. Nam cum variatio differentialis evanescere debeat posito $x = 0$, pars integralis eiusmodi constantem involvit, quae hanc conditionem adimpleat; haec autem constans terminos absolutos, si in iis ponatur $x = 0$, ad nihilum redigere debet. Quare formulae illae

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}, \quad Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}, \quad R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}$$

aeque evanescere debent casu $x = 0$ atque casu $x = a$.

PROBLEMA 2

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam quandam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\, dx$ utcunque implicet, ut sit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.},$$

in formula autem Φ sit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipsarum x, y, p, q, r etc. existente

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \mathfrak{S} ds + \text{etc.},$$

atque his ita se habentibus oporteat definiri variationem differentialem huius formulae integralis $\int Z dx$ a termino $x = 0$ ad terminum $x = a$ extensam.

SOLUTIO

Cum sit $\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$, quaeramus ante omnia δZ, ac primo quidem statim patet esse

$$\delta Z = L\,\delta\Phi + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \text{etc.}\ ,$$

ubi ut ante habebitur

$$\delta p = \frac{d\,\delta y}{dx},\quad \delta q = \frac{dd\,\delta y}{dx^2},\quad \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3},\quad \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4}\ \text{etc.},$$

verum, ob $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z}\,dx = \int \delta\mathfrak{Z}\,dx$ erit simili modo

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}$$

hincque

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})\ .$$

Cum igitur primum membrum formulae $\delta Z dx$ sit $L dx\,\delta\Phi$, erit

$$\int L dx\,\delta\Phi = \int L dx \int (\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})\,dx\ .$$

Ponatur nunc $\int L dx = V$, ac habebitur

$$\int L dx\,\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc,}) - \int V dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})\ .$$

Perinde hic est, qua lege integrale $\int L dx = V$ capiatur; quamcunque enim constantem adiiceremus, ea in hac expressione iterum tolleretur. Ponamus ergo istud integrale ita capi, ut evanescat posito $x = a$, et quia variatio differentialis ad terminum $x = a$ accommodari debet, erit

$$\int L dx\,\delta\Phi = -\int V dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.})\ ,$$

ad quod si addantur reliquae partes, colligimus fore

$$\delta\int Z dx = \int dx(N - V\mathfrak{N})\,\delta y + (P - V\mathfrak{P})\,\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\,\delta q + \text{etc.})\ ,$$

ubi, si reductiones supra indicatas adhibeamus, prodibit ista variatio differentialis iam ad terminum $x = a$ adstricta:

$$\int \delta y dx\left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\,\delta y}{dx}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\,\delta y}{dx^2}((R - V\mathfrak{R}) - \text{etc.})\ ,$$

cuius expressionis constitutio per se est manifesta.

COROLLARIUM 1

Haec ergo solutio ex praecedente oritur, si loco quantitatum simplicium N, P, Q, R etc. substituantur hae compositae:

$$N - V\mathfrak{N}, \quad P - V\mathfrak{P}, \quad Q - V\mathfrak{Q}, \quad R - V\mathfrak{R} \quad \text{etc.},$$

ubi est $V = \int L dx$, integrali hoc ita sumto, ut evanescat posito $x = a$.

COROLLARIUM 2

Si igitur formula integralis $\int Z dx$ debeat reddi maximum vel minimum pro termino $x = a$, efficiendum est, ut ex variatione omnium valorum intermediorum ipsius y nulla variatio differentialis resultet, unde relatio inter x et y ita definitur, ut sit:

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

quae ergo relatio iam terminum praescriptum $x = a$ involvit, ita ut, si alius terminus praescribatur, alia quoque relatio indefinita inter x et y esset resultatura, propterea quod quantitas V hunc valorem $x = a$ in se complectitur.

COROLLARIUM 3

Hoc modo eiusmodi relatio inter x et y invenitur, ex qua formula $\int Z dx$ ita maximum minimumve valorem adipiscatur, ut manentibus valoribus ipsius y extremis iisdem, quomodocunque valores intermedii immutentur, formulae $\int Z dx$ valor prodituras sit semper vel minor casu maximi vel maior casu minimi, quam si iusta relatio adhiberetur.

COROLLARIUM 4

Si vero etiam valores extremi determinationi nostrae permittantur, ex variatione differentiali inventa etiam hos definire licet. Relatio scilicet inventa per integrationes ita determinari debet, ut posito $x = a$ etiam pars absoluta evanescat. Hinc itaque efficiendum est, ut posito $x = a$ sit

$$(P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$(Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx} + \frac{dd(S - V\mathfrak{S})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$(R - V\mathfrak{R}) - \frac{d(S - V\mathfrak{S})}{dx} + \text{etc.} = 0$$

$$\text{etc.}$$

COROLLARIUM 5

Hoc quidem casu fit $V = 0$, verumtamen hinc nonnisi eos terminos, qui ipsam quantitatem V involvunt, eiicere licet. Ubi enim eius differentialia occurrunt, quia est $\frac{dV}{dx} = L$, pro L scribi debet valor, quem induit posito $x = a$, qui forte hoc casu non evanescit, quod idem tenendum est de differentialibus sequentibus:

$$\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dL}{dx}, \quad \frac{d^3V}{dx^3} = \frac{ddL}{dx^2} \text{ etc.},$$

qui valores prius in genere sunt capiendi, antequam in iis ponatur $x = a$.

COROLLARIUM 6

Sin autem quoque valores primi ipsius y nostrae determinationi relinquantur, tum iisdem aequationibus satisfieri debet ponendo $x = 0$, ubi eadem sunt observanda, quae modo notavimus. Aequationes scilicet has ante penitus evolvi oportet, quam in iis statuatur $x = 0$. His autem conditionibus quantitates tantum constantes in relationem indefinitam inter x et y ingressae determinantur.

PROBLEMA 3

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam duas formulas integrales $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$ et $\Phi' = \int \mathfrak{Z}' dx$ utcunque involvat, ut sit

$$dZ = L d\Phi + L' d\Phi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

in iis autem formulis Φ et Φ' functiones $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ tantum per quantitates x, y, p, q, r etc. determinentur, ut sit

$$\begin{aligned} d\mathfrak{Z} &= \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.} \\ d\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.}, \end{aligned}$$

definire relationem inter x et y, ut haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extenditur, maximum minimumve valorem consequatur.

SOLUTIO

Oportet igitur variationem differentialem formulae $\int Z dx$ definiri, quae cum sit $\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$, habemus primo:

$$\delta Z = L \delta\Phi + L' \delta\Phi' + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.},$$

deinde vero est

$$\delta\Phi = \delta\int 3\,dx = \int \delta 3\,dx \quad \text{et} \quad \delta\Phi' = \int \delta 3'\,dx$$

hincque propterea:

$$\begin{aligned} \delta 3 &= \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.} \\ \delta 3' &= \mathfrak{N}'\,\delta y + \mathfrak{P}'\,\delta p + \mathfrak{Q}'\,\delta q + \mathfrak{R}'\,\delta r + \text{etc.}\,, \end{aligned}$$

ex quibus colligimus:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}) \\ \delta\Phi' &= \int dx(\mathfrak{N}'\,\delta y + \mathfrak{P}'\,\delta p + \mathfrak{Q}'\,\delta q + \mathfrak{R}'\,\delta r + \text{etc.})\,. \end{aligned}$$

Cum igitur sit variatio differentialis quaesita

$$\delta\int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int L'\,dx\,\delta\Phi' + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p + \text{etc.}\,,$$

ponamus $\int L\,dx = V$ et $\int L'\,dx = V'$, eritque ut supra

$$\begin{aligned} \int L\,dx\,\delta\Phi &= V\int dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}) \\ &\quad - \int V\,dx(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int L'\,dx\,d\Phi &= V'\int dx(\mathfrak{N}'\,\delta y + \mathfrak{P}'\,\delta p + \mathfrak{Q}'\,\delta q + \mathfrak{R}'\,\delta r + \text{etc.}) \\ &\quad - \int V'\,dx(\mathfrak{N}'\,\delta y + \mathfrak{P}'\,\delta p + \mathfrak{Q}'\,\delta q + \mathfrak{R}'\,\delta r + \text{etc.})\,. \end{aligned}$$

Ponamus autem haec integralia $V = \int L\,dx$ et $V' = \int L'\,dx$ ita capi, ut evanescant posito $x = a$, ac praecedentium formularum partes priores sponte in nihilum abibunt, siquidem earum valores pro termino $x = a$ capi debent. Omnibus igitur partibus coniungendis obtinebimus

$$\begin{aligned} \delta\int Z\,dx &= \int dx\,\delta y\,(N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') \\ &\quad + \int dx\,\delta p\,(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') \\ &\quad + \int dx\,\delta q\,(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') \\ &\quad + \int dx\,\delta r\,(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cum vero sit

$$\begin{aligned} \int P\,dx\,\delta p &= P\,\delta y - \int \delta y\,dP \\ \int Q\,dx\,\delta q &= Q\frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx}\,dQ + \int\frac{\delta y}{dx}\,ddQ \\ \int R\,dx\,\delta r &= R\frac{dd\,\delta y}{dx^2} - \frac{d\,\delta y}{dx^2}\,dR + \frac{\delta y}{dx^2}\,ddR - \int\frac{\delta y}{dx^2}\,d^3R \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

eliciemus variationem differentialem quaesitam

$$\delta \int Z dx = \int dx\, \delta y \left((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \frac{d(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') - \frac{d(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{dd\,\delta y}{dx^2} \left((R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') - \text{etc.} \right) + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 1

Ponamus brevitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}' = (N), \quad P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}' = (P), \quad Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}' = (Q) \text{ etc.}$$

ac relatio indefinita inter x et y exprimetur hac aequatione:

$$(N) - \frac{d(P)}{dz} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} = 0 ,$$

quae tamen iam involvit terminum praescriptum $x = a$, quia formulae integrales $V = \int L dx$ et $V' = \int L' dx$ ita sunt captae, ut evanescant posito $x = a$.

COROLLARIUM 2

Cum autem integratio huius aequationis, si fuerit differentialis, constantes arbitrarias involvat, si et hae determinationi nostrae relinquantur, ut formula $\int Z dx$ valorem omnium maximum vel minimum adipiscatur, eas ita definiri convenit, ut tam posito $x = 0$ quam $x = a$ etiam his aequationibus satisfiat

$$(P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} = 0 , \quad (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} = 0 , \quad (R) - \text{etc.} = 0 .$$

COROLLARIUM 3

Si functio Z non solum duas huiusmodi formulas integrales $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$, $\Phi' = \int \mathfrak{Z}' dx$, sed etiam plures $\Phi'' = \int \mathfrak{Z}'' dx$, $\Phi''' = \int \mathfrak{Z}''' dx$ etc. involvat, ita tamen, ut litterae $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ etc. denotent tantum functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. neque ultra ullas formulas integrales involvant, ex solutione problematis etiam huiusmodi formularum variationes differentiales facile assignantur.

PROBLEMA 4

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ utcunque implicet, ut sit

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.},$$

functio autem $\mathfrak{Z}$ etiam praeter x, y, p, q, r etc. aliam denuo formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{z}\,dx$ involvat, ut sit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\Phi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \text{etc.},$$

functio vero $\mathfrak{z}$ tantum ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. sit composita existente

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\,dx + \mathfrak{n}\,dy + \mathfrak{p}\,dp + \mathfrak{q}\,dq + \mathfrak{r}\,dr + \text{etc.},$$

definire relationem inter x et y, ut haec formula integralis $\int Z\,dx$, quatenus a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ extenditur, maximum minimumve valorem consequatur.

SOLUTIO

In hunc igitur finem variationem differentialem formulae $\int Z\,dx$ exquiri convenit; quae cum sit $\delta \int Z\,dx = \int \delta Z\,dx$, habemus primo:

$$\delta Z = L\,\delta\Phi + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \text{etc.}$$

ideoque variatio differentialis erit

$$\delta \int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p + \int Q\,dx\,\delta q + \int R\,dx\,\delta r + \text{etc.}$$

Nunc autem ob $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\,dx = \int \delta\mathfrak{Z}\,dx$ et

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,\delta\Phi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}$$

habebimus simili modo

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\Phi + \int \mathfrak{N}\,dx\,\delta y + \int \mathfrak{P}\,dx\,\delta p + \int \mathfrak{Q}\,dx\,\delta q + \int \mathfrak{R}\,dx\,\delta r + \text{etc.}$$

Denique vero est $d\Phi = \delta \int \mathfrak{z}\,dx = \int \delta\mathfrak{z}\,dx$, ideoque ob

$$\delta\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.}$$

erit

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{n}\,dx\,\delta y + \int \mathfrak{p}\,dx\,\delta p + \int \mathfrak{q}\,dx\,\delta q + \int \mathfrak{r}\,dx\,\delta r + \text{etc.}$$

Sit iam $\int \mathfrak{L}\,dx = v$, ac fiet

$$\int \mathfrak{L}\,dx\,\delta\Phi = v \int dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.}) - \int v\,dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.}),$$

unde acquirimus

$$\delta\Phi = v\int dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.})$$
$$+ \int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + \int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}$$

Ponamus ergo porro $\int L dx = V$ et $\int Lv dx = T$, eritque

$$\int L dx\,\delta\Phi = T\int dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.})$$
$$- \int T\,dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.})$$
$$+ V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}$$
$$- \int V\,dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) - \int V\,dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) - \int V\,dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}$$

His igitur omnibus colligendis prodibit variatio differentialis quaesita

$$\delta\int Z dx = T\int dx(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\,\delta p + \mathfrak{q}\,\delta q + \mathfrak{r}\,\delta r + \text{etc.})$$
$$+ V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}$$
$$+ V\int dx\,\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})$$
$$+ \int dx\,\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})$$
$$+ \int dx\,\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})$$
$$\text{etc.},$$

quae cum ad terminum usque $x = a$ extendi debeat, ponamus integralia $\int L dx = V$ et $\int L dx \int \mathfrak{L} dx = T$, quandoquidem determinatio integrationis nostro arbitrio relinquitur, ita capi, ut evanescant posito $x = a$, quo nostra expressio facilior reddatur. Deinde vero ponamus brevitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} + (Vv - T)\,\mathfrak{n} = (N)$$
$$P - V\mathfrak{P} + (Vv - T)\,\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q - V\mathfrak{Q} + (Vv - T)\,\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R - V\mathfrak{R} + (Vv - T)\,\mathfrak{r} = (R)$$
$$\text{etc.}$$

existente, ut assumsimus, $v = \int \mathfrak{L} dx$, atque variatio differentialis quaesita reducetur ad hanc formam:

$$\delta\int Z dx = \int dx\,\delta y\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\,\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\,\delta y}{dx^2}((R) - \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

COROLLARIUM 1

Cum sit $v = \int \mathfrak{L} dx$, erit

$$Vv = \int L dz \int \mathfrak{L} dx \text{ et } Vv - T = \int L dx \int \mathfrak{L} dx - \int L dx \int \mathfrak{L} dx = \int \mathfrak{L} dx \int L dx .$$

Quia autem per determinationes assumtas expressio $Vv - T$ evanescit posito $x = a$, si ponamus $\int L dx = V$ et $\int \mathfrak{L} V dx = \mathfrak{V}$, ambo haec integralia ita capi oportet, ut evanescant posito $x = a$.

COROLLARIUM 2

His igitur formulis $\int L dx = V$ et $\int \mathfrak{L} V dx = \mathfrak{V}$ in computum introductis ponendum erit:

$$\begin{aligned} N - V\mathfrak{N} + \mathfrak{V}\mathfrak{n} &= (N) \\ P - V\mathfrak{P} + \mathfrak{V}\mathfrak{p} &= (P) \\ Q - V\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} &= (Q) \\ R - V\mathfrak{R} + \mathfrak{V}\mathfrak{r} &= (R) \\ &\text{etc.} , \end{aligned}$$

et variatio differentialis per litteras (N), (P), (Q) etc. perinde exprimetur, ac supra casu primo per litteras N, P, Q etc. erat definita.

COROLLARIUM 3

Ex his iam facile colligere licet, si etiam functio $\mathfrak{Z}$ novam formulam integralem involvat, quemadmodum tum variatio differentialis exprimatur; si scilicet fuerit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{l} d\Phi' + \mathfrak{m} dx + \text{etc.} ,$$

tum ad formulas $V = \int L dx$ et $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L} V dx$ insuper tertia $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{l} \mathfrak{V} dx$ accederet; reliqua attendenti facile se offerent.

PROBLEMA 5

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \Im dx$ utcunque implicet, ut sit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.} ,$$

functio vero $\Im$ praeter quantitates x, y, p, q, r etc. eandem denuo formulam integralem $\Phi = \int \Im dx$ involvat, ut sit

$$d\Im = \mathfrak{L} d\Phi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.} ,$$

definire relationem inter x et y, ut haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x = 0$ ad terminum datum $x = a$ extenditur, maximum minimumve valorem adipiscatur.

SOLUTIO

Variatio differentialis est ut hactenus

$$\delta \int Z dx = \int L dx\, \delta\Phi + \int N dx\, \delta y + \int P dx\, \delta p + \int Q dx\, \delta q + \int R dx\, \delta r + \text{etc.},$$

deinde vero habemus $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z} dz = \int \delta\mathfrak{Z} dx$ et

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,\delta\Phi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}$$

Cum autem sit $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$, erit

$$\mathfrak{Z} = \frac{d\Phi}{dx} \quad \text{et} \quad \delta\mathfrak{Z} = \frac{\delta d\Phi}{dx} = \frac{d\,\delta\Phi}{dx};$$

ponamus tantisper

$$\delta\Phi = u \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.} = \omega,$$

ut obtineatur haec aequatio

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{L} u + \omega,$$

cuius integrale sumto e pro numero, cuius logarithmus $= 1$, est

$$e^{-\int \mathfrak{L} dx}\, u = \int e^{-\int \mathfrak{L} dx}\, \omega dx$$

ideoque

$$\delta\Phi = e^{\int \mathfrak{L} dx} \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}),$$

unde deducitur

$$\int L dx\, \delta\Phi = \int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}).$$

Ponatur iam $\int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx = V$, quod integrale ita capiatur, ut evanescat posito $x = a$, sitque $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit

$$\int L dx\, \delta\Phi = -\int U dx (\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r + \text{etc.}),$$

cui parti si reliquae partes addantur reductionesque superiores fiant, prodibit variatio differentialis quaesita $\delta \int Z dx$

$$= \int dx\,\delta y \left((N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((P - U\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - U\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - U\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q - UQ) - \frac{d(R - U\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} \left((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.} \right),$$

ex qua ut supra ea relatio inter x et y elicitur, qua formulae integrali $\int Z dx$ pro termino $x = a$ valor maximus vel minimus conciliatur; haec enim relatio exprimetur ista aequatione:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}) = 0 .$$

Tum vero pro constantium per integrationem invectarum determinatione singulae partes absolutae tam pro casu $x = a$ quam pro casu $x = 0$ nihilo aequales effici poterunt.

COROLLARIUM

Quia posuimus $e^{-\int \mathfrak{Q}\,dx} V = U$, erit $V = e^{\int \mathfrak{Q}\,dx} U$, unde differentiando fiet

$$dV = e^{\int \mathfrak{Q}\,dx}(dU + U\mathfrak{Q}\,dx) .$$

Cum autem sit $dV = e^{\int \mathfrak{Q}\,dx} L dx$, habebitur ista aequatio differentialis:

$$dU + U\mathfrak{Q}\,dx = L dx ,$$

ex qua quantitatem U ita definiri oportet, ut ea evanescat posito $x = a$.

PROBLEMA 6

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ involvat, ita ut sit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.} ,$$

definire relationem inter x et y, ut haec formula $\int Z dx$ maximum minimumve valorem induat, quatenus quidem a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = a$ extenditur.

SOLUTIO

Cum variatio differentialis sit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta \Phi + \int N dx \, \delta y + \int P dx \, \delta p + \int Q dx \, \delta q + \int R dx \delta r + \text{etc.},$$

habebitur etiam $\delta \Phi = \delta \int Z dx$, unde fit differentiando:

$$d\delta \Phi = L dx \, \delta \Phi + N dx \, \delta y + P dx \, \delta p + Q dx \, \delta q + R dx \, \delta r + \text{etc.}$$

hincque invenitur ut ante

$$\delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}),$$

ex quo adipiscimur ob $\int e^{\int L dx} L dx = e^{\int L dx}$

$$\int L dx \delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}) - \int dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}),$$

quod postremum membrum a reliquis partibus tollitur. Quare, si ponamus $e^{-\int L dx} = T$, erit tota variatio differentialis

$$\begin{aligned} \delta \int Z dx = \frac{1}{T} \int dx \, \delta y & \left(TN - \frac{d \cdot TP}{dx} + \frac{dd \cdot TQ}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot TR}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ & + \delta y \left(TP - \frac{d \cdot TQ}{dx} + \frac{dd \cdot TR}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ & + \frac{d \delta y}{dx} \left(TQ - \frac{d \cdot TR}{dx} + \text{etc.} \right) \\ & + \frac{dd \delta y}{dx^2} (TR - \text{etc.}) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Quo igitur formula $\int Z dx$ evadat maxima vel minima, relatio indefinita inter x et y hac aequatione exprimetur:

$$TN - \frac{d \cdot TP}{dx} + \frac{dd \cdot TQ}{dx^2} - \frac{d^3 TR}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

partes vero absolutae singulae inservient constantibus per integrationem ingressis determinandis.

SCHOLION

Hac igitur Analysi nullas considerationes geometricas involvente non solum omnium problematum ad hanc maximorum et minimorum methodum pertinentium easdem adepti sumus solutiones, quas iam in libro meo de

maximis et minimis dedi, sed etiam haec methodus peculiarem suppeditavit determinationem constantium, quae priori methodo indeterminatae relinquuntur; unde innumera problemata singularia expedite resolvi possunt, ad quae prior methodus minus congrue accommodatur. Veluti si inter omnes lineas a dato puncto non ad aliud punctum, sed ad lineam quandam datam sive rectam sive curvam ducendas ea requiratur, super qua corpus ab illo puncto descendens tempore brevissimo ad hanc lineam perveniat, per considerationem illarum partium absolutarum hoc problema facile resolvitur, dum iis ista conditio praescribitur, ut curva quaesita ad datam sit normalis. Antequam autem finiam, examini Analystarum egregium Theorema subiiciam, cuius veritas ex principiis hactenus positis haud difficulter perspicitur et quod in calculo integrali eximium usum praestare videtur.

THEOREMA

Proposita formula differentiali Zdx, in qua Z sit functio quaecunque quantitatum x, y, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc., eaque differentiata prodeat:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

ita ut haec formula differentialis Zdx differentialia non solum prima, sed etiam altiora cuiusque ordinis complectatur, tum facile diiudicari poterit, utrum ista formula integrationem admittat sive sit differentiale completum, nec ne? Consideretur enim ista expressio sumto dx constante

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

quae si reperiatur nihilo aequalis, formula Zdx erit integrabilis; verum si non fuerit $V = 0$, ea non erit integrabilis.

METHODUS NOVA ET FACILIS CALCULUM VARIATIONUM TRACTANDI

Commentatio 420 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **16** (1771), 1772, p. 35—70
Summarium ibidem p. 8—11

SUMMARIUM

Quamquam hoc argumentum de calculo variationum ab Illustrissimo EULERO multoties antea sit pertractatum, imprimis in opusculo Tertio Calculi Integralis Volumini annexo[1]), tamen, quae in hac Dissertatione occurrunt, ut plane nova considerari merentur, siquidem heic in eo occupatus est, ut ostendat calculum variationum, quem antea novum calculi genus constituere ratus erat, levi facta immutatione referri posse ad secundam partem calculi integralis, qua de integrationibus formularum differentialium disquiritur, in quibus functiones duarum variabilium occurrunt. Quum enim calculus variationum in eo versetur, ut, si proposita fuerit quaecunque relatio binarum variabilium x et y et ea aliquantillum varietur, investigandum sit, quam mutationem subeant non solum x et y, sed etiam eorum differentialia quaecunque ex huiusmodi variatione, omnino liquet has variationes facile assignari posse, si y consideretur ut functio binarum variabilium x et t, quo ipso variatio quaesita ipsius y alias signo δy exprimi solita iam exprimetur hac formula $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Si nimirum y concipiatur ut applicata alicuius lineae curvae, cuius abscissa sit x, in calculo variationum requiritur, ut relatio assignetur, quae omnes alias curvas huic proximas complectitur; manifestum autem est omnes has curvas exprimi posse aequatione $y = V$, ubi V functio est quaecunque ipsorum x et t, modo ita fuerit comparata, ut posito $t = 0$ prodeat $V = X$, ideoque $y = X$ aequatio, quae pro curva principali locum habere debet. In ipsis vero variationibus investigandis ita versatur Illustrissimus EULERUS, ut consideret functiones secundum ordinem expressionum, tractando scilicet primum formulas, quae x et y tantum continent, deinde formulas, quae praeter x et y eorum differentialia primi, secundi vel altiorum graduum complectuntur,

1) Confer *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, volumen 13, p. 371: Appendix de calculo variationum. C. C.

tum vero progreditur ad expressiones, quae formulas quoque integrales involvunt, invenit autem variationem formulae integralis $\int Z dx$ posito

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.},$$

ubi

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx} \text{ etc.},$$

hac exprimi formula:

$$dt \int dx \left(N\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right) + R\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right) + \text{etc.}\right).$$

Perspicuum autem est huiusmodi expressiones $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ determinatos valores adipisci non posse, nisi y consideretur ut determinata functio ipsorum x et t, in doctrina autem variationum eiusmodi relatio inter x et y ut plane incognita spectari solet, imprimis quando huius doctrinae applicatio fit ad quaestiones de maximis et minimis, ubi requiritur, ut huiusmodi variatio in nihilum abeat. Ostendendum igitur fuit, quomodo formula supra allata in aliam transformari possit ita comparatam, ut sub signo summatorio non occurrat nisi $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, ex quo colligitur pro casu variationis evanescentis membrum istud signo summatorio affectum in nihilum abire. Methodus haec, quae ad quascunque expressiones duarum variabilium patet, etiam facile adplicari potest ad formulas, quae tres variabiles x, y, z involvunt, in hoc autem negotio necessum est unam earum uti z tamquam functionem binarum reliquarum x et y considerare. Heic igitur regulae praescribuntur pro invenienda variatione expressionum, quae vel solas variabiles x, y, z involvunt vel praeterea differentialia quaecunque ipsius z vel denique formulam integralem duplicatam $\int\int Z dx dy$, ubi Z est functio quaecunque variabilium x, y, z et differentialium quorumcunque ipsius z, integratio autem ita instituenda est, ut pro prima integratione sola x ut variabilis tractetur, pro secunda autem sola y. Simili vero modo patet huius Methodi applicationem facile fieri posse ad formulas quatuor vel plures variabiles involventes. Huiusmodi autem formularum complicatiorum evolutio quum parum fructuosa sit et praeterea vix rite adumbrari possit, nisi omnia phaenomena formularum, quae binas tantum variabiles involvunt, accurate fuerint explicata, hunc in finem Illustrissimus Auctor singulas partes, quae expressionem pro variatione formulae $\int Z dx$ ingrediuntur, ad examen revocare utile duxit. Huic autem explicationi demum subiunxit dilucidationes quasdam circa curvas maximi minimive proprietate praeditas, idque eo potiori cum iure, quod usus calculi variationum imprimis in huiusmodi quaestionibus resolvendis sit insignis. Quaestiones autem de maximis et minimis in varias distribui possunt classes, prout scilicet aequatio pro maximo vel minimo vel finita est vel differen-

tialia primi, secundi aut altiorum graduum involvat. Animadvertit autem Illustrissimus Auctor, quod, quemadmodum pro prima classe aequatio omnino est determinata et curva huiusmodi quaestionibus satisfaciens non detur nisi unica, ita pro reliquis classibus certas praescribi conditiones, ut determinata assignari possit curva quaestioni satisfaciens, easque tanto plures, quanto sublimioris gradus differentialia involvit formula maximi et minimi. Sic pro secunda classe, ubi differentialia primi gradus involvuntur, haec praescribitur conditio, ut curvae, inter quas maxima exquiri debet, per data duo transeat puncta, pro tertia autem classe, quae differentialia secundi gradus involvit, insuper praescribitur, ut datae sint tangentes curvarum in datis his punctis.

---

1. Si detur aequatio quaecunque inter binas variabiles x et y seu, quod eodem redit, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, tum omnes expressiones quomodocunque ex his duabus quantitatibus x et y formatae et compositae tamquam functiones unius variabilis x spectari poterunt, ita ut pro quovis valore determinato ipsius x determinatos quoque valores sortiantur.

2. Huiusmodi autem expressionum ex quantitatibus x et y formatarum tria genera constitui convenit; ad quorum primum referimus omnes illas expressiones, in quibus tantum ipsae quantitates x et y occurrunt et per operationes quascunque sive algebraicas sive etiam transcendentes inter se sunt complicatas, cuiusmodi sunt $\alpha x^3 + \beta xy + \gamma y^3$, item e^{ax} Arc sin y, in qua posteriore operationes transcendentes cernuntur. Secundum autem genus eas complectitur expressiones in quibus praeter ipsas quantitates x et y etiam ratio differentialium occurrit, quam rationem adeo ad differentialia cuiusque gradus extendimus, cuiusmodi expressionum indolem quo clarius perspiciamus, ponatur more solito

$$dy = pdx\,, \quad dp = qdx\,, \quad dq = rdx \quad \text{etc.}$$

ac tales expressiones erunt functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. Tertium denique genus eiusmodi expressiones continet, in quibus praeterea formulae integrales involvuntur, quorsum pertinent expressiones illae in calculo variationum imprimis consideratae, quae hac forma sunt repraesentatae $\int V dx$, ubi V est functio quaecunque non solum ipsarum x et y, sed etiam quantitatum p, q, r etc., quin etiam ea alias insuper formulas integrales involvere potest.

3. His circa terna huiusmodi expressionum genera constitutis facilius indolem calculi variationum explicare poterimus. Totum enim negotium huc

redit, ut, si proposita fuerit relatio quaecunque inter x et y eaque aliquantillum varietur seu eius loco alia quaepiam relatio inter x et y ab illa infinite parum quomodocunque discrepans adhibeatur, investigari oporteat, quantam mutationem omnes illae expressiones, tam primi, quam secundi et tertii generis sint subiturae, ad quod inveniendum in calculo variationum, prouti equidem eum olim tractavi, praeter differentiale dy, quo quantitas y augetur, dum x in $x + dx$ abit, ipsi quantitati y aliud incrementum δy tribuitur penitus ab arbitrio nostro pendens neque per x determinatum, cui incremento variationis nomen indideram atque methodum exposueram variationes inde in singula expressionum genera redundantes inveniendi.

4. Videbatur igitur calculus variationum omnino singulare calculi genus constituere, verum postquam eius indolem accuratius essem perscrutatus, universum hunc calculum perspexi levi facta immutatione ad secundam partem calculi integralis, cuius elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento exposui, reduci posse. Pertractavi autem in ista secunda parte eas integrationes, quae circa functiones duarum variabilium versantur, in quo calculi genere etiam nunc vix ultra prima elementa progredi licuit.

5. Illius scilicet incrementi loco, quod variationem appellavi, ipsam quantitatem y non amplius tamquam functionem solius variabilis x considero, sed eam tamquam functionem binarum variabilium x et t in calculum introduco, sic enim, dum $dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$ significat verum differentiale ipsius y, haec formula $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ idem significare poterit, quod antea signo δy indicavimus. Quo haec reddantur clariora, concipiamus y ut applicatam cuiuspiam curvae abscissae x respondentem, atque in calculo variationum alia relatio requiritur, quae omnes alias curvas huic saltem proximas complectatur, omnes autem huiusmodi curvas, si X denotet illam functionem, cui y aequatur, tali aequatione contineri posse: $y = X + tV$ manifestum est, denotante V functionem quamcunque ipsius x. Sumta enim t infinite parva haec aequatio omnes omnino lineas curvas propositae proximas in se comprehendet atque adeo hanc formam multo generaliorem reddere licet, ita ut pro y functio quaecunque binarum variabilium x et t usurpari possit, dummodo ea ita fuerit comparata, ut posito $t = 0$ prodeat ipsa functio proposita $y = X$.

7. Pro variatione igitur invenienda, quantitas x ut constans spectari, ipsius vero y differentiale tantum ex variabilitate ipsius t desumi debet; unde, si expressio proposita fuerit primi generis functio scilicet ipsarum x et y tan-

tum, quam littera Z designemus, ponamus differentiatione consueta prodire $Mdx + Ndy$, atque nunc pro variatione invenienda fiat $dx = 0$, ad loco dy scribatur $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$, quippe quod est incrementum ex sola variabilitate t oriundum. Quo facto variatio quaesita huius expressionis Z erit $= N dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Quare, si ipsa variatio simili modo per $dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)$ indicetur, habebimus $\left(\frac{dZ}{dt}\right) = N\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

7. Nunc ad expressiones secundi generis progrediamur, in quibus quum praeter x et y occurrant quantitates p, q, r etc., harum variationes, quatenus y etiam a variabili t pendet, per legem generalem his formulis exprimentur

$$dt\left(\frac{dp}{dt}\right), \quad dt\left(\frac{dq}{dt}\right), \quad dt\left(\frac{dr}{dt}\right) \text{ etc.}$$

Quum autem pro sola variabili x sit

$$p = \left(\frac{dy}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \quad \text{et} \quad r = \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddp}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \text{ etc.},$$

erit per regulas generales differentiandi functiones duarum variabilium

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right), \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) = \left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right), \quad \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{d^3y}{dx^3\,dt}\right) \text{ etc.},$$

ubi meminisse iuvabit formulam verbi gratia $\left(\frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt}\right)$ prodire, si functio y ter differentietur et duabus vicibus sola x, una vice autem sola t variabilis sumatur, tum vero qualibet differentiatione differentialia simplicia dx vel dt abiiciantur.

8. His expeditis sit iam Z functio quaecunque ipsarum x, y, p, q, r etc., hic quidem nullo adhuc respectu habito ad variabilem t, quippe quae tantum in subsidium variationis introducitur, atque differentiatione more solito facta prodeat

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.};$$

nunc igitur pro variatione seu $dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)$ invenienda scribi debebit, ut sequitur:

$$dx = 0, \quad dy = dt\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad dp = dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right),$$

$$dq = dt\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right), \quad dr = dt\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

atque variatio quaesita erit

$$dt\left(\frac{dZ}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\,dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + Q\,dt\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right) + R\,dt\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right) + \text{etc.},$$

unde sequitur divisione per dt facta fore:

$$\left(\frac{dZ}{dt}\right) = N\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right) + R\left(\frac{d^4y}{dx^3dt}\right) + \text{etc.}$$

9. Sit nunc etiam expressio quaecunque tertii generis proposita $\int Z\,dx$, ubi Z sit functio quaecunque ipsarum x, y, p, q, r etc., ita ut per differentiationem ordinariam habeatur:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr\ ,$$

ubi quidem hactenus nulla ratio novae variabilis t est habita atque integratio formulae propositae $\int Z\,dx$ per solam variabilem x est expedienda, quo observato quaestio huc redit, ut si iam y ut functio binarum variabilium x et t consideretur et ubique quantitas y elemento $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ augeatur, augmentum, quod ipsa formula integralis $\int Z\,dx$ inde capiet, definiatur, hoc enim augmentum ipsa erit variatio formulae integralis propositae.

10. Quare ad hanc variationem inveniendam in functione illa Z ubique loco y scribatur eius valor auctus $y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ sicque, ut ante vidimus, ipsa functio Z augmentum capiet $dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)$, ex quo ipsa formula integralis augmentum capiet hoc: $\int dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)dx$, quod erit ipsa variatio quaesita. Quoniam vero in hac integratione sola x pro variabili habetur, elementum dt ante signum poni poterit, ita ut iam variatio futura sit $= dt\int dx\left(\frac{dZ}{dt}\right)$.

11. Quoniam igitur in paragrapho 8 valor ipsius $\left(\frac{dZ}{dt}\right)$ iam evolutus habetur, si ille hic substituatur, formulae $\int Z\,dx$ variatio prodibit ita expressa:

$$dt\int dx\left(N\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right) + R\left(\frac{d^4y}{dx^3\cdot dt}\right) + \text{etc.}\right),$$

quam etiam sequenti modo per partes repraesentasse iuvabit

$$dt\int N\,dx\left(\frac{dy}{dt}\right) + dt\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + dt\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2\cdot dt}\right) + dt\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3dt}\right) + \text{etc.},$$

qua expressione contenti esse possemus, si quaestio circa casum aliquem determinatum institueretur, ubi y non solum functioni cuipiam datae ipsius x aequaretur, sed etiam nova variabilis t modo determinato introduceretur; tum enim omnes istas formulas $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right)$ etc. actu evolvere liceret, ita ut tum elementum dx per solam functionem ipsius x afficeretur, siquidem, uti initio innuimus, evolutione facta iterum poni debet $t = 0$.

12. At vero tales quaestiones determinatae nunquam occurrere solent, sed potius relatio inter y et x semper incognita esse solet inde demum determinanda, quod variatio in nihilum abire debeat, quippe in quo Methodus maximorum et minimorum versatur. Huiusmodi quaestiones ergo ita enunciari convenit, qualis relatio inter quantitates x et y intercedere debeat, ut formulae integralis propositae $\int Z dx$ variatio in nihilum abeat, quomodocunque etiam nova variabilis t in calculum introducatur? Quodsi autem quaestio hac ratione instituatur, perspicuum est formulis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right)$ etc. nullos certos valores tribui posse.

13. Verum hic prorsus singulare artificium in subsidium vocari potest, cuius ope formulas integrales posteriores in paragrapho 11 ad formam prioris reducere licet, ita ut in omnibus eadem formula $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ occurrat. Quum enim $dx\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)$ sit differentiale formulae $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ sumta sola x variabili, erit per consuetam integralium reductionem:

$$\int P dx\left(\frac{ddy}{dxdt}\right) = P\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

simili modo, quia $dx\left(\frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt}\right)$ est differentiale formulae $\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)$, habebimus statim hanc reductionem

$$\int Q dx\left(\frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt}\right) = Q\left(\frac{ddy}{dxdt}\right) - \int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dxdt}\right),$$

nunc vero per praecedentem reductionem fit

$$\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dxdt}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

sicque omnino habebimus

$$\int Q dx\left(\frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt}\right) = Q\left(\frac{ddy}{dx \cdot dt}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

atque nunc satis perspicuum est sequentem formulam integralem ita reductum iri:

$$\int R dx \left(\frac{d^4y}{dx^3 dt}\right) = R\left(\frac{d^3y}{dx^2 \cdot dt}\right) - \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx dt}\right) + \left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

ac si insuper talis formula adesset, foret:

$$\int S dx \left(\frac{d^5y}{dx^4 dt}\right) = S\left(\frac{d^4y}{dx^3 \cdot dt}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^2 dt}\right) + \left(\frac{ddS}{dx^2}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) - \left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \int dx \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

14. Quodsi nunc has formulas reductas substituamus in expressione variationis quaesitae formulae $\int Z dx$, tum haec variatio non solum formulis constabit integralibus, sed etiam continebit partes absolutas, quarum aliae formulam $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, aliae hanc $\left(\frac{ddy}{dx dt}\right)$, aliae vero hanc $\left(\frac{d^3y}{dx^2 dt}\right)$ etc. continebunt, dum contra omnes integrales eandem formulam $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ involvunt, quocirca variatio quaesita formulae propositae $\int Z dx$ sequenti modo habebitur expressa

$$\begin{aligned}
&dt \int dx \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.}\right) \\
&+ dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \left(\frac{dQ}{dx}\right) + \left(\frac{ddR}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \text{etc.}\right) \\
&+ dt\left(\frac{ddy}{dx dt}\right)\left(Q - \left(\frac{dR}{dx}\right) + \left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \text{etc.}\right) \\
&+ dt\left(\frac{d^3y}{dx^2 dt}\right)\left(R - \left(\frac{dS}{dx}\right) + \text{etc.}\right) \\
&+ dt\left(\frac{d^4y}{dx^3 dt}\right)(S - \text{etc.}) \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

15. Quamquam hic meum institutum non est methodum maximorum et minimorum pertractare, quoniam hoc alibi iam satis copiose est factum, tamen hic praetermittere non possum, quin observem, si variatio formulae $\int Z dx$ evanescere debeat, quomodocunque etiam nova variabilis t in calculum ingrediatur, id nullo modo fieri posse, nisi tota pars prima integralis seorsim evanescat, ex quo necesse est inter x et y hanc aequationem constitui

$$0 = N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.},$$

et quia nunc variabilis t nulla amplius ratio habetur sicque tantum unica adhuc variabilis x superest, clausulis omissis hanc habebimus aequationem:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\ ,$$

qua desiderata relatio inter x et y exprimitur. Partes autem absolutae tantum ad terminos extremos referuntur, circa quas ea observari debent, quae iam alibi fusius sunt praecepta.

16. Hic etiam non immoror iis casibus, quibus quantitas Z ipsa insuper formulas integrales involvit, quoniam etiam hoc argumentum alibi satis est pertractatum, verum hic opus multo magis arduum molior, dum eandem hanc methodum ad functiones adeo duarum variabilium extendere conabor, quod equidem in dissertatione illa, quam olim de calculo variationum conscripseram, tunc temporis praestare non potui, multitudine tot quantitatum diversi generis deterritus.

APPLICATIO METHODI PRAECEDENTIS AD FUNCTIONES DUARUM VARIABILIUM

17. Si habeatur aequatio quaecunque inter ternas variabiles x, y et z, ea naturam cuiuspiam superficiei exprimi censemus, ubi quidem binas coordinatas x et y in plano horizontali constitui intelligamus, tertiam vero z verticalem, sicque haec tertia z ut functio spectari potest binarum x et y; unde more solito duplicia incrementa consideranda occurrunt, quatenus scilicet a variabilitate ipsius x vel ipsius y nascuntur. Illud nempe incrementum ipsius z, quod ex variatione ipsius x oritur, hac formula: $dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$, hoc vero ex variatione ipsius y oriundum ista: $dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$ indicari solet.

18. Quodsi iam haec superficies aequatione inter x, y et z expressa cum aliis quibuscunque superficiebus ipsi proximis comparari debeat, id commodissime fiet novam variabilem t introducendo, ita ut iam z spectanda sit ut functio trium variabilium x, y et t, quae quidem sumto $t = 0$ in functionem superiorem abeant, at, dum ipsi t valores infinite parvi tribuuntur, omnes superficies proximas complectatur, quo posito perspicuum est, quoniam variabiles x et y a nova t neutiquam pendent, earum differentialia dx et dy nullo modo cum dt permisceri, sola vero coordinata z triplicis generis incrementa capere potest; praeter bina enim iam ante commemorata, quae vel ab x vel ab y proficiscuntur, accipere poterit incrementum a variabilitate ipsius t oriundum, quod tali formula $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$ est repraesentandum.

19. Ponamus nunc V esse expressionem utcunque ex ipsis coordinatis x, y et z compositam, sive per meras operationes algebraicas sive etiam transcendentes formatas, quae more solito differentiata praebeat:

$$dV = Ldx + Mdy + Ndz ,$$

atque si eiusdem incrementum desideretur a nova variabili t sola oriundum, manifestum est statui debere $dx = 0$ et $dy = 0$, at loco dz scribi debere $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sicque hoc signandi modo usurpato habebimus

$$dt\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dz}{dt}\right) \quad \text{ideoque} \quad \left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right) .$$

Tales autem expressiones ut ante primum genus constituunt.

20. Progrediamur ergo ad secundum genus, quo expressio v praeter ipsas coordinatas x, y, z etiam rationes differentialium earum involvat; atque hic quidem ante omnia formam huiusmodi expressionum accuratius perpendi oportet. Quoniam autem hic statim quantitas z duplicia incrementa capere potest (hic enim nondum ad novam variabilem t respicimus), ponamus brevitatis gratia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = p' ,$$

quae duae litterae differentialia primi gradus comprehendunt, deinde pro differentialibus secundi gradus ponamus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = q , \quad \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = q' , \quad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = q'' ,$$

unde sequentes relationes inter has litteras et praecedentes notasse iuvabit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q , \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) = q' , \quad \left(\frac{dp'}{dy}\right) = q'' ;$$

simili modo differentialia tertii gradus his formulis complectamur:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r , \quad \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) = r' , \quad \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) = r'' , \quad \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r''' ,$$

ubi hae relationes sunt notandae:

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right), \quad r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right), \quad r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right), \quad r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right) ;$$

quarta autem differentialia has formulas praebent:

$$s = \left(\frac{d^4z}{dx^4}\right), \quad s' = \left(\frac{d^4z}{dx^3dy}\right), \quad s'' = \left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right), \quad s''' = \left(\frac{d^4z}{dxdy^3}\right), \quad s^{IV} = \left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)$$

et sic ultra, quousque libuerit.

21. His explicatis expressiones secundi generis praeter ipsas coordinatas x, y et z etiam quantitates p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. utcunque involvere possunt, ex quo, si V denotet quamcunque huiusmodi expressionem, eius differentiale more solito sumtum sequenti forma exhibeamus:

$$\begin{aligned} dV = Ldx + Mdy + Ndz + Pdp + Qdq + Rdr \\ + P'dp' + Q'dq' + R'dr' \\ + Q''dq'' + R''dr'' \\ + R'''dr''' \\ \text{etc.,} \end{aligned}$$

quam formam animo imprimi conveniet, ne opus sit eam saepius repetere.

22. Quodsi iam huiusmodi expressionum variatio seu id incrementum inveniri debeat, quod resultat ex variatione novae variabilis t, quam in valorem coordinatae z introducimus, iam vidimus sumi debere $dx = 0$ et $dy = 0$, tum vero fieri $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ob eandem vero rationem sequentia differentialia simili modo erunt exprimenda, quae cum suis transformationibus per se claris ita se habebunt:

$$\begin{aligned} dp &= dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{ddz}{dxdt}\right), \quad dp' = dt\left(\frac{dp'}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dydt}\right), \\ dq &= dt\left(\frac{dq}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right), \\ dq' &= dt\left(\frac{dq'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right), \quad dq'' = dt\left(\frac{dq''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dy^2dt}\right), \\ dr &= dt\left(\frac{dr}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^3dt}\right), \quad dr' = dt\left(\frac{dr'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^2dydt}\right), \\ dr'' &= dt\left(\frac{dr''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dxdy^2dt}\right), \quad dr''' = dt\left(\frac{dr'''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dy^3dt}\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

23. Totum ergo negotium huc redit, ut in formula illa differentiali pro dV data loco singulorum differentialium isti valores substituantur, hocque modo prodibit variatio expressionis V ex sola variabilitate ipsius t oriunda seu valor huius formulae $dt\left(\frac{dV}{dt}\right)$, quoniam autem singula membra elemento dt erunt affecta, eo omisso adipiscimur sequentem formam:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right) + P\left(\frac{ddz}{dxdt}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2 \cdot dt}\right) + R\left(\frac{d^4z}{dx^3 \cdot dt}\right)$$
$$+ P'\left(\frac{ddz}{dydt}\right) + Q'\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right) + R'\left(\frac{d^4z}{dx^2dydt}\right)$$
$$+ Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2 \cdot dt}\right) + R''\left(\frac{d^4z}{dxdy^2dt}\right)$$
$$+ R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3 \cdot dt}\right),$$

quae ad variationes quarumcunque expressionum secundi generis inveniendas sufficit.

24. Nunc expressiones tertii generis adgredi poterimus formulas integrales involventes, in quibus potissimum vis huius methodi cernitur. Quando enim quaestio circa maxima vel minima, quae in superficiebus occurrere possunt, versatur, formula illa, quae maximum vel minimum reddi debet, necessario est formula integralis atque adeo formula integralis duplicata, cuius indolem hic paucis explicari convenit. Quemadmodum enim in praecedente parte formulae integrales simplices sunt consideratae, quae ad datam abscissam x sunt relatae, ita hic in superficiebus quaestiones semper non ad solam abscissam x, sed ad totum quoddam spatium in plano horizontali tanquam basem sunt referendae, cui portio superficiei, quae maximi minimive quadam proprietate gaudere debet, immineat. Quare, quum talis basis duplicem habeat dimensionem, alteram ab x, alteram vero ab y pendentem, huiusmodi formulae integrales erunt duplicatae hoc modo exprimi solitae $\int\int V dxdy$; eae scilicet duplicem integrationem postulant atque in priore sola coordinata x vel sola y pro variabili habetur et integratio usque ad terminos basis propositae extenditur, tum vero demum etiam altera variabilis assumitur atque altera integratio absolvitur. Et quoniam perinde est, utra prius pro variabili habeatur, sine discrimine geminam illam integrationem signo duplicato $\int\int$ indicamus; neque vero hic loci est omnia, quae circa huiusmodi integrationes duplicatas sunt observanda, fusius exponere, quippe quod argumentum in Tomo XIV. horum Commentariorum[1]) iam satis accurate est pertractatum.

25. Quodsi ergo huiusmodi formulae integralis $\int\int V dxdy$ variatio quaeri debeat, ubi V denotat expressionem quamcunque vel primi vel secundi generis, ex superioribus satis liquet hanc variationem ita expressum iri:

1) Confer Commentationem 391 (indicis ENESTROEMIANI). *De formulis integralibus duplicatio.* *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 17, p. 289. C. C.

$$dt \int\int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx dy \ ,$$

quae forma iterum est integralis duplicata et, prouti vel x vel y priore integratione ut constans spectatur, ea formula vel hoc modo

$$dt \int dx \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dy$$

vel hoc modo

$$dt \int dy \int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx$$

exhiberi potest.

26. Sit nunc V talis expressio, qualem supra paragrapho 19 descripsimus et cuius variationem seu valorem $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ in paragrapho 23 evolvimus, tantum opus erit singula membra ibi exposita heic loco $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ substituere; unde sequens congeries formularum integralium nascetur, quibus iunctim sumtis variatio quaesita $dt \int\int \left(\frac{dV}{dt}\right) dx dy$ exprimetur:

$$\begin{aligned} dt \int\int N \left(\frac{dz}{dt}\right) dx dy + dt \int\int P \left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right) dx dy + dt \int\int Q \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dt}\right) dx dy + dt \int\int R \left(\frac{d^4 z}{dx^3 dt}\right) dx dy \\ + dt \int\int P' \left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right) dx dy + dt \int\int Q' \left(\frac{d^3 z}{dx dy dt}\right) dx dy + dt \int\int R' \left(\frac{d^4 z}{dx^2 dy dt}\right) dx dy \\ + dt \int\int Q'' \left(\frac{d^3 z}{dy^2 dt}\right) dx dy + dt \int\int R'' \left(\frac{d^4 z}{dx dy^2 dt}\right) dx dy \\ + dt \int\int R''' \left(\frac{d^4 z}{dy^3 dt}\right) dx dy \end{aligned}$$

etc.

27. Nunc singula haec membra post primum peculiares reductiones admittunt, quas probe notasse iuvabit. Pro secundo membro sumamus primo x tantum variabile, eritque:

$$\int P \left(\frac{ddz}{dx dt}\right) dx = P \left(\frac{dz}{dt}\right) - \int \left(\frac{dz}{dt}\right) dx \left(\frac{dP}{dx}\right),$$

unde etiam alteram integrationem adiiciendo erit:

$$\int\int P \left(\frac{ddz}{dx dt}\right) dx dy = \int P \left(\frac{dz}{dt}\right) dy - \int\int \left(\frac{dz}{dt}\right) \left(\frac{dP}{dx}\right) dx dy \ .$$

Pro tertio membro sumatur primo sola y variabilis, eritque:

$$\int P'\left(\frac{ddz}{dy\cdot dt}\right)dy = P'\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy\left(\frac{dP'}{dy}\right),$$

unde ipsum tertium membrum transibit in

$$\int\int P'\left(\frac{ddz}{dydt}\right)dxdy = \int P'\left(\frac{dz}{dt}\right)dx - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP'}{dy}\right)dxdy\ .$$

28. Pro sequentibus membris hae ipsae reductiones sequentes dabunt transformationes, pro quarto scilicet habebimus ex secundo

$$\int\int Q\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right)dxdy = \int Q\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)dy - \int\int\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dxdy\ ,$$

at vero hoc membrum posterius ad similitudinem secundi reducitur hoc modo, ubi tantum loco P scribi debet $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$:

$$\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dxdy\ ,$$

ita ut nunc quartum membrum praebeat hanc formam:

$$\int Q\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)dy - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy + \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dxdy\ .$$

Simili modo quintum membrum ope secundi reducitur, ubi loco P scribitur Q' et loco $\left(\frac{ddz}{dxdt}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)$, sive loco $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ scribendo $\left(\frac{ddz}{dydt}\right)$, sicque habebitur

$$\int\int Q'\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)dxdy = \int Q'\left(\frac{ddz}{dydt}\right)dy - \int\int\left(\frac{ddz}{dydt}\right)\left(\frac{dQ'}{dx}\right)dxdy\ ,$$

quod posterius membrum cum tertio conferatur, ubi loco tantum P' scribi debet $\left(\frac{dQ'}{dx}\right)$, quo pacto totum membrum induet hanc formam:

$$\int Q'\left(\frac{ddz}{dydt}\right)dy - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ'}{dx}\right)dx + \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right)dxdy\ ,$$

sextum vero membrum bis cum secundo collatum reducitur ad hanc formam:

$$\int Q''\left(\frac{ddz}{dydt}\right)dx - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ''}{dy}\right)dx + \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)dxdy\,,$$

28. Si hoc modo ulterius progrediamur ad sequentia membra, septimum membrum in sequentes partes resolvitur:

$$\int R\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right)dy - \int\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)\left(\frac{dR}{dx}\right)dy + \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)dy - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)dxdy,$$

deinde octavum membrum

$$\int R'\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)dy - \int\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)\left(\frac{dR'}{dx}\right)dx + \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'}{dxdy}\right)dy - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right)dxdy,$$

tum nonum membrum fiet

$$\int R''\left(\frac{d^3z}{dxdydt}\right)dx - \int\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)\left(\frac{dR''}{dy}\right)dy + \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR''}{dxdy}\right)dx - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)dxdy,$$

et decimum

$$\int R'''\left(\frac{d^3z}{dy^2dt}\right)dx - \int\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)\left(\frac{dR'''}{dy}\right)dx + \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)dx - \int\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)dxdy.$$

29. Colligamus nunc omnes istas formulas in unam summam atque variatio quaesita pluribus constabit membris, quarum primum formulas integrales duplicatas, reliqua vero simplices complectentur, hoc pacto variatio quaesita sequenti modo erit expressa:

$$dt\int\int dxdy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left\{\begin{array}{r} N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) \\ - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \\ + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dydy^2}\right) \\ - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$+dt\left\{\begin{array}{l}\int\left(\frac{dz}{dt}\right)P\,dy+\int Q\,dy\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)-\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R\,dy\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right)\\ \int\left(\frac{dz}{dt}\right)P'dx+\int Q'dy\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R'dy\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\ \qquad+\int Q''dx\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R''dx\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\ \qquad\qquad+\int R'''dx\left(\frac{d^3z}{dy^2dt}\right)\\ \qquad-\int dy\left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\\ \qquad-\int dx\left(\frac{dR'}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)\\ \qquad-\int dy\left(\frac{dR''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right)\\ \qquad-\int dx\left(\frac{dR'''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)\\ \qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}$$

30. Verum quid haec singula membra proprie significent et ad quemnam usum adhiberi queant, neutiquam adhuc perspicere licet, unde hoc argumentum, cuius prima fundamenta etiamnunc vix iacta sunt, censenda omnem Geometrarum attentionem atque multo accuratiorem investigationem postulare videtur, quod negotium vix ante suscipere licet, quam casus nonnulli particulares omni studio et diligentia fuerint evoluti, quin etiam ipsa pars prior, quae tantum circa functiones unius variabilis versatur, neutiquam adhuc satis clare et distincte est enucleata, ita ut perspicue intelligeremus veram indolem atque naturam singularum partium, quibus variationem contineri invenimus, quem in finem dilucidationes sequentes hic adiungere visum est.

DILUCIDATIONES SUPER THEORIA VARIATIONUM AD FUNCTIONES SALTEM UNIUS VARIABILIS ACCOMMODATA

31. Quaestiones, quae hic occurrunt, ad hoc problema generale revocare licet:

Explicatio ipsius Problematis

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x indeque definiatur valor cuiuspiam formulae integralis datae $\int Z\,dx$, denotante Z expressionem ex ipsis quantitatibus x et y earumque differentialium rationibus utcunque compositam, quaestio est,

si loco illius functionis y alia quaecunque illi proxima seu infinite parum tantum ab ea discrepans adhibeatur, quanto maiorem minoremve valorem tum eadem formula integralis $\int Z dx$ *sit consecutura.*

32. At quia hoc modo ista quaestio enunciata nimis videri posset abstracta, eam more soluto ad Geometriam revocemus. Sit igitur super axe AP (Fig. 1) proposita curva quaecunque AM aequatione inter abscissam $AP = x$ et applicatam $PM = y$ expressa, pro qua definiri oporteat valorem formulae cuiuspiam integralis $\int Z dx$, qui sit $= W$, quo posito consideretur alia curva quaecunque $\alpha\mu$ infinite parum a data discrepans, ac si pro hac curva itidem definiatur valor formulae $\int Z dx$, quaeritur, quantum iste valor a praecedente sit discrepaturus; evidens enim est hoc discrimen praebere ipsam variationem quantitatis W, quam supra ope calculi variationum exhibuimus.

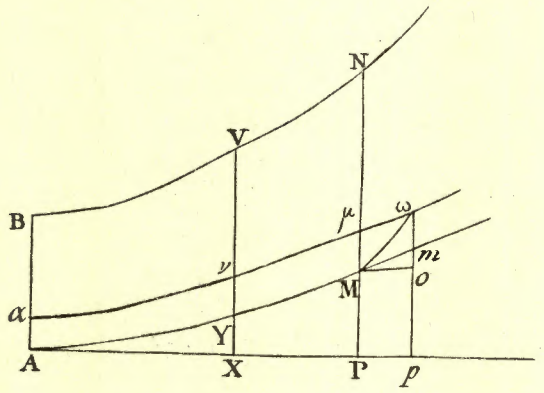


Fig. 1

33. Quo haec adhuc clariora evadant, exemplum quodpiam proferamus, quo proposita curva AM eiusque axe AP tamquam verticali considerato quaeritur tempus, quo corpus ex puncto A super hac curva AM descendens usque ad punctum M pertingit. Iam, quia celeritas corporis in M est ut $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$ et ipsum curvae elementum $= dx\sqrt{(1 + pp)}$, posito scilicet $dy = pdx$, uti in solutione generali est praeceptum, erit tempus per elementum $Mm = dx\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{x}}$, unde formula integralis $\int Z dx$ pro hoc casu abit in $\int dx\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{x}}$, ita ut habeatur $Z = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{x}}$; quare nunc tempus erit definiendum, quo corpus super curva quacunque proxima $\alpha\mu$ descendens ab α usque ad μ perveniet, ubi discrimen dabit ipsam variationem formulae $\int dx\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{x}}$ huic casui convenientem.

34. Quoniam hic formula integralis consideranda venit, ante omnia dispiciendum est, quomodo eam determinari oporteat. In exemplo quidem allato manifestum est formulae $\int\frac{dx\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{x}}$ integrale ita capi debere, ut evanescat

posito $x = 0$, unde etiam in genere intelligitur semper pro integratione formulae $\int Z dx$ certum aliquem terminum veluti punctum A tamquam principium integrationis statui atque integrale $\int Z dx$ evanescere debere posito $x = 0$ vel, si forte circumstantiae aliter fuerint comparatae, tribuendo ipsi x valorem quempiam datum; deinde vero initio constituto valor formulae $\int Z dx = W$ abscissae $AP = x$ respondebit.

35. His circa formulam integralem $\int Z dx$ observatis videamus, quamnam ideam nobis de curvis illis proximis $\alpha\mu$ formare debeamus. Ac primo quidem patet has curvas continuo quodam tractu ductas esse debere, ita ut in iis nusquam anguli aliive saltus deprehendantur; hoc solo notato perinde est, sive istae curvae lege quapiam continuitatis vel aequatione quapiam contineantur, sive sint adeo discontinuae, quasi libero manus motu ductae.

36. Huiusmodi lineae curvae commodissime sequenti modo formatae menti repraesentari possunt. Ducatur scilicet pro lubitu linea curva quaecunque BN eidem abscissae AP imminens, ac ductis ad singula axis puncta X applicatis XYV singula intervalla YV in ratione finiti ad infinite parvum secentur in v, ita ut Yv sit quasi pars infinitesima intervalli YV. Hoc enim modo curva $\alpha v \mu$ obtinebitur a curva proposita AM in omnibus punctis infinite parum dissita, qualem ad institutum nostrum requirimus. Praeterea tamen notandum est in curva illa arbitraria BN nusquam tangentem ad axem AP normalem esse debere, quia hoc modo divisio illorum intervallorum turbaretur. Atque nunc evidens est non solum intervalla Yv esse infinite parva, sed etiam tangentes in punctis Y et v infinite parum a parallelismo deficere.

Explicatio partis primae in variatione

37. His circa ipsam quaestionis propositionem annotatis contemplemur nunc accuratius quoque solutionem supra inventam eiusque singulas partes, ut, quid quaelibet earum innuat et ad quemnam usum sit transferenda, perspicue intelligamus; solutionem autem in paragrapho 14 datam hic contemplabimur. Statim igitur consideremus primam variationis ibi inventae partem, quae hac formula integrali continetur

$$dt \int dx \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \text{etc.}\right),$$

cuius integratio ita capi debet, ut in ipso termino initiali A evanescat, qua conditione constans arbitraria determinatur; quodsi ergo in singulis punctis

XY haec formula applicata intelligatur, aggregatum omnium istarum formularum elementarium ab initio A usque ad terminum M extensum praebebit primam partem variationis quaesitae, atque hic quidem in Figura perspicuum est spatiolum Yv exprimere incrementum applicatae y a sola variabili t oriundum, ita ut sit $Yv = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

38. Haec igitur prima pars variationis involvit omnia spatiola Yv intra terminos A et M contenta, quae quum in infinitum variari possint atque adeo a positivis ad negativa transire queant, maximae variationes hic locum habere possunt. Verum tamen unicus casus hinc debet excipi, quo curva AM ita est comparata, ut sit

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.},$$

tum enim, utcunque curvae proximae fuerint comparatae, ista pars prima variationis semper in nihilum abit. Neque deviatio curvarum proximarum $\alpha\mu$ a principali AM intra terminos A et M quicquam ad variationem confert; ex quo haec curva respectu formulae integralis $\int Z dx$ inprimis est memorabilis, quandoquidem in ea haec formula integralis vel maximum vel minimum obtinet valorem.

Explicatio partis secundae in variatione

39. Progrediamur nunc ad secundam partem variationis supra inventae, quae est

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right),$$

circa quam primum observo, quoniam ea ad terminum M refertur per integrationem rite institutam, insuper adiici debere similem expressionem ad terminum priorem A relatam, at vero signo contrario affectam, id quod ideo est necessarium, ut facto $x = 0$ etiam haec expressio penitus tollatur. Refertur autem ista pars

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$

unice ad ultimum terminum M, ubi $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ipsum spatiolum $M\mu$ exprimit, similique modo in alteram partem pro initio A spatiolum $A\alpha$ ingredietur. Hinc patet, si omnes curvae proximae $\alpha\mu$ per ipsos ambos terminos A et M ducantur, tum variationem secundae partis in nihilum abire.

40. Consideremus autem casum, quo curva proxima $\alpha\mu$ per primum quidem terminum A transit, non vero quoque per alterum M, sed sit punctum μ eius terminus, atque variatio ex secunda parte nata erit

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) .$$

Atque hinc etiam definire poterimus variationem ex eodem fonte oriundam, si curva proxima $A\mu$ non in ipso puncto μ, sed alio quocunque ω terminetur, existente semper intervallo $\mu\omega$ infinite parvo. Ducta enim applicata ωmp variatio modo inventa insuper augeri debet particula formulae $\int Z dx$, quae elemento $Pp = dx$ respondet, quae particula quum sit $= Z \cdot Pp$, pro arcu curvae proximae $A\omega$ erit variatio ex secunda parte oriunda

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) + Z \cdot Pp .$$

41. Ducatur recta $M\omega$ et quaeramus angulum ωMm, quem haec recta $M\omega$ cum curva principali constituit, ponatur iste angulus $\omega Mm = \omega$ et ducta MO ipsi Pp parallela, quia est proxime $m\omega = M\mu$ et anguli mMo tangens $= p$ ideoque $om = p \cdot Pp$, habebitur $o\omega = M\mu + p \cdot Pp$, unde fit:

$$\text{tang } \omega Mo = \frac{M\mu}{Pp} + p ,$$

atque hinc colligitur

$$\omega Mm = \text{tang } \omega = \frac{M\mu}{Pp(1 + pp) + M\mu \cdot p} .$$

Servemus nunc in calculo hunc ipsum angulum ω atque hinc habebimus spatiolum:

$$M\mu = \frac{Pp(1 + pp)\,\text{tang } \omega}{1 - p\,\text{tang } \omega} ,$$

quo valore substituto variatio pro arcu $A\omega$ erit:

$$Pp\left(Z + \frac{(1 + pp)\,\text{tang } \omega}{1 - p\,\text{tang } \omega} \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)\right) .$$

42. Nunc operae pretium erit eum angulum ω definire, ut ista variatio in nihilum abeat, id quod eveniet, si capiatur

$$\text{tang } \omega = \frac{Z}{pZ - (1 + pp)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)} ,$$

quare hoc angulo ita constituto pro omnibus lineis proximis ubicunque in recta $M\omega$ terminatis variatio ex secunda parte oriunda evanescet. Hic casus prae caeteris omnino notatu dignus considerari meretur, quo recta $M\omega$ fit ad curvam principalem in puncto M normalis, quod evenit, si fuerit

$$pZ - (1 + pp)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) = 0 ,$$

qua aequatione certa conditio ipsius formulae integralis $\int Z dx$ sive indoles expressionis Z definitur.

43. Non igitur pigebit in talem expressionem Z inquisivisse, ac primo quidem patet eam praeter coordinatas x et y etiam quantitatem p involvere debere. Sumamus autem praeterea in Z non ingredi litteras q, r etc., ita ut sit $Q = 0$, $R = 0$, ac nostra aequatio resolvenda erit:

$$pZ = (1 + pp)P ,$$

ubi notandum est esse

$$dZ = M dx + N dy + P dp ,$$

quare, si ambae coordinatae x et y tanquam constantes tractentur, erit

$$dZ = P dp \quad \text{ideoque} \quad P = \frac{dZ}{dp} ,$$

quo valore ibi introducto haec prodibit aequatio

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{p dp}{1 + pp} ,$$

quae integrata dat

$$LZ = L\sqrt{(1 + pp)} + LC ,$$

quae constans functio quaecunque ipsarum x et y esse potest, talis functio sit V atque habebimus

$$Z = V\sqrt{(1 + pp)}$$

ideoque formula integralis

$$= \int V dx \sqrt{(1 + pp)} .$$

Huius formulae significatum satis eleganter per tempus, quo corpus quodpiam per curvam AM promovetur, exprimi potest. Si enim celeritas in puncto M fuerit $= \frac{1}{V}$, hoc est si celeritas in singulis punctis proportionalis fuerit

functioni cuicunque binarum variabilium x et y, tum $Vdx\sqrt{(1+pp)}$ exprimit elementum temporis ideoque formula

$$\int Vdx\sqrt{(1+pp)}$$

totum tempus, quo corpus ab A ad M pervenit.

Explicatio partis tertiae in variatione

44. Quod ad tertiam partem variationis attinet, scilicet

$$dt\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{ddS}{dx^2}\text{ etc.}\right),$$

ea locum non habet, nisi expressio Z etiam differentialia secundi gradus involvat, quod quidem rarissime usu venire solet. Hic autem observandum est, quoniam $M\mu = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$, fore pro sequenti elemento

$$m\omega = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)+dtdx\left(\frac{ddy}{dxdt}\right),$$

unde colligitur

$$dt\left(\frac{ddy}{dxdt}\right)=\frac{m\omega-M\mu}{dx}=\frac{M\omega-M\mu}{Pp},$$

hac autem formula exprimitur declinatio directionis $\mu\omega$ a directione Mm, quae quidem, ut iam ante observavimus, semper est quam minima.

45. Quodsi ergo tangens in μ perfecte fuerit parallela tangenti in M, quod evenit, si etiam in curva generatrice BN tangens ad N huic fuerit parallela, tum variatio ex tertia parte oriunda prorsus evanescit, quod etiam de termino initiali A est intelligendum, si tangentes in A et B inter se fuerint parallelae, atque hinc iam perspicitur, ut variationes ex quarta parte oriundae evanescant, necesse esse, ut praeterea etiam radii osculi in punctis M et μ fiant aequales.

46. Atque ex his iam satis perspicuum est variationes ex secunda parte oriundas evanescere, si omnes curvae proximae $\alpha\mu$ per utrumque terminum M et A ducantur, deinde vero insuper etiam variationes tertiae partis, si omnes curvae proximae simul in utroque termino A et M cum curva principali AM communes habeant tangentes. Praeterea vero quoque variationes quartae partis in nihilum abire, si omnes curvae proximae in terminis A et M insuper ratione curvaturae cum curva principali conveniant. Hic autem probe memi-

nisse iuvabit variationes tertiae partis per se evanescere, si modo quantitas Z non differentialia secundi gradus involvat; quartae vero partis semper evanescere, nisi differentialia tertii gradus in quantitatem Z ingrediantur, et ita porro. Unde quum initio ostenderimus, quomodo variatio primae partis ad nihilum sit redigenda, nunc evidentissime intelligimus, sub quibusnam conditionibus omnes variationis partes simul evanescant.

DILUCIDATIONES CIRCA CURVAS MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE PRAEDITAS

47. Si formula integralis $\int Z dx$ in curva quaesita debeat esse vel maximum vel minimum, iam supra ostendimus posito

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

naturam huius curvae hac exprimi aequatione:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

quae aequatio, nisi quantitates P, Q, R evanescant vel sint constantes, semper est differentialis vel secundi vel quarti vel sexti aliusve gradus paris. Hic ergo statim memoratu dignum occurrit, quod ista aequatio nunquam vel simpliciter differentialis vel tertii vel quinti aliusve gradus imparis evadat, id quod mox clarius exponemus.

48. Quaestiones ergo huc pertinentes sponte in varias dividuntur pro gradu differentialium, ad quem aequationes exsurgunt, quandoquidem ab hoc gradu natura solutionis maxime pendet, propterea quod ea semper totidem constantes arbitrarias involvit. Ad primam ergo classem referimus eos casus, quibus aequatio pro maximo vel minimo inventa prorsus est finita. Ad secundam autem classem eos, quibus haec aequatio fit differentialis secundi gradus, ad tertiam eos, quibus aequatio ad quartum gradum ascendit, et ita porro, quas singulas classes ordine describamus.

I. Classis

Ad solutionem ergo primae classis formula $\int Z dx$ statim perducit, quando expressio Z tantum per coordinatas x et y exclusis omnium differentialium rationibus determinatur; quia enim hoc casu simpliciter fit

$$dZ = M dx + N dy,$$

aequatio pro curva maximi vel minimi erit $N = 0$, quae ergo aequatio omnino est determinata atque adeo curva satisfaciens unica in suo genere. Veluti, si quaeratur linea, in qua valor formulae $\int dx(2xy - yy)$ fiat maximus vel minimus, ob $Z = 2xy - yy$ ideoque $N = 2(x - y)$ aequatio quaesita erit $x - y = 0$ seu linea quaesita erit recta ad axem angulo semirecto inclinata, pro qua ergo valor formulae propositae integralis est $\frac{x^3}{3}$, qui utique minor est, quam si ulla alia linea curva sumeretur pro eadem scilicet abscissa.

49. His autem casibus primą classis nondum exhauritur, sed dantur adhuc alii perinde ad aequationes finitas ducentes, ad quod ostendendum sit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipsarum x et y atque $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy$ iamque ponatur $Z = \mathfrak{Z}p$, eritque $M = \mathfrak{M}p$, $N = \mathfrak{N}p$, $P = \mathfrak{Z}$, quare, ut formula $\int Zdx$ fiat maximum vel minimum, aequatio reperitur:

$$0 = \mathfrak{N}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{N}p - \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{N} \cdot dy}{dx} = -\mathfrak{M} ,$$

quae itidem est aequatio finita. Quod quidem etiam statim praevidere licuisset, quum enim sit $pdx = dy$, haec formula integralis $\int \mathfrak{Z}dy$ a praecedente $\int Zdx$ aliter non differt, nisi quod coordinatae x et y sint permutatae, unde, quod de priore erat affirmatum, etiam de posteriore valet.

Hinc natura primae classis adhuc generalius ita describi potest, ut ea complectatur omnes formulas integrales huiusmodi $\int (Z + \mathfrak{Z}p)dx$, ubi litterae Z et $\mathfrak{Z}$ denotant functiones quascunque ipsarum x et y, tum enim aequatio pro curva maximi vel minimi erit:

$$0 = N - \mathfrak{M} ,$$

quae est aequatio omnino determinata.

II. Classis

50. Ad classem secundam referimus eas formulas integrales $\int Zdx$, quae deducunt ad aequationem differentialem secundi gradus; huc ergo primo pertinent casus, quibus Z tantum ex litteris x, y et p componitur, ita ut sit

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp ,$$

unde quidem casum posteriorem primae classis excipere oportet, quippe quod evenit, si P fuerit functio tantum ipsarum x et y, ita ut pro praesenti casu quantitas P praeter x et y etiam litteram p complecti debeat. Tum autem

aequatio pro curva quaesita erit $0 = N - \frac{dP}{dx}$, ubi, quum P involvat p ideoque $d \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)$, formula $\frac{dP}{dx}$ continebit differentialia secundi gradus; haec ergo aequatio neutiquam est determinata, quum duas adeo constantes arbitrarias recipiat, quibus effici potest, ut curva per data duo puncta transeat, atque adeo quaestiones huius classis ita accuratius sunt definiendae, ut curvae investigentur, quae non inter omnes plane curvas, sed inter eas tantum, quae per eadem duo puncta ducuntur, praescripta maximi minimive proprietate gaudeant; semper autem quaestiones huius classis ita sunt comparatae, ut per naturam suam hanc restrictionem postulent.

51. Praeterea vero etiam ad secundam classem referri oportet casus, quibus $Z = \Im q$ existente $\Im$ functione quacunque ipsarum x, y et p, si enim fuerit

$$d\Im = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp ,$$

habebimus

$$M = \mathfrak{M}q , \quad N = \mathfrak{N}q , \quad P = \mathfrak{P}q \quad \text{et} \quad Q = \Im ,$$

quare, quum aequatio pro curva sit

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \quad \text{sive} \quad 0 = N - \frac{1}{dx} d \cdot \left(P - \frac{dQ}{dx}\right) ,$$

formula haec $P - \frac{dQ}{dx}$ abit in

$$\mathfrak{P}q - \frac{d\Im}{dx} = \mathfrak{P}q - \mathfrak{M} - \mathfrak{N}p - \mathfrak{P}q = -\mathfrak{M} - \mathfrak{N}p ,$$

unde aequatio nostra evadet

$$0 = N + \frac{1}{dx} d(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p) = 2\mathfrak{N}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx} ,$$

quae manifesto tantum differentialia secundi gradus continet. Generalius ergo adhuc, si formula integralis proposita fuerit $\int (Z + \Im q)dx$, ubi Z et $\Im$ quomodocunque ex quantitatibus x, y et p sint compositae, aequatio pro curva quaesita erit

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + 2\mathfrak{N}q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$$

sive etiam

$$0 = Ndx - dP + 2\mathfrak{N}dp + d\mathfrak{M} + pd\mathfrak{N} ,$$

quae manifesto tantum est differentialis secundi gradus.

III. Classis

52. At si quantitas Z ita ex litteris x, y, p et q fuerit composita, ut posito

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$$

etiam quantitas Q involvat litteram q, tum huiusmodi casus ad tertiam classem erunt referendi, et quum aequatio pro curva quaesita reperiatur

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

evidens est terminum $\frac{ddQ}{dx^2}$ involvere differentialia quarti gradus, unde aequatio finita pro curva implicabit quatuor constantes arbitrarias, quibus ergo effici potest, ut curva desiderata non solum per datos duos terminos transeat, sed etiam eius tangentes in utroque termino datam obtineant positionem, in qua quadruplici determinatione natura quaestionum ad hanc classem pertinentium continetur et accuratissime perspicitur.

53. Reliquis casibus ad hanc classem pertinentibus non immoror, verum potius illustrationis caussa insigne adferam exemplum, quo curvae elasticae investigari solent. Scilicet (Fig. 1, p. 224) si littera ϱ denotet radium osculi curvae quaesitae in puncto M, omnes hae curvae hac gaudent proprietate, ut in iis haec formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$ sit minimum ideoque habeatur

$$Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}, \quad \text{quum vero sit} \quad \varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q},$$

habebimus $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$, unde fit

$$M = 0\,, \quad N = 0\,, \quad P = -\frac{5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \quad \text{et} \quad Q = +\frac{2q}{(1+pp)^{5:2}},$$

quare, quum ob $N = 0$ aequatio pro curvis quaesitis sit:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

eius integrale statim praebet

$$P - \frac{dQ}{dx} = A\,,$$

quae adhuc est differentialis tertii gradus.

54. Verum haec aequatio adhuc in genere integrari potest, multiplicetur enim per $qdx = dp$, ut habeatur haec aequatio

$$Pdp - qdQ = Adp \ , \quad \text{quum vero sit} \quad dZ = Pdp + Qdq \ ,$$

erit $Pdp = dZ - Qdq$, quo valore substituto aequatio resultat haec:

$$dZ - Qdq - qdQ = Adp \ ,$$

cuius integrale manifesto est

$$Z - Qq = Ap + B \ ,$$

nunc igitur pro Z et Q valores supra dati substituantur atque nanciscemur sequentem aequationem:

$$-\frac{qq}{(1+pp)^{5:2}} = Ap + B \ ;$$

mutatis igitur signis constantium colligemus

$$qq = (Ap + B)(1 + pp)^{5:2}$$

ideoque

$$q = (1 + pp)^{5:4} \sqrt{(Ap + B)} = \frac{dp}{dx} \ ,$$

sicque concludimus

$$dx = \frac{dp}{(1 + pp)^{5:4}\sqrt{(Ap + B)}}$$

hincque porro

$$dy = \frac{pdp}{(1 + pp)^{5:4}\sqrt{(Ap + B)}}$$

quibus duabus aequationibus constructio curvae absolvitur.

55. Cum olim haec Methodus maximorum et minimorum tractari est coepta, non solum eiusmodi curvae sunt investigatae, in quibus formula quaepiam integralis $\int Zdx$ esset vel maximum vel minimum, sed etiam eiusmodi quaestiones proponebantur, ut non inter omnes plane curvas, sed inter eas tantum, quae habeant eandem longitudinem, ea quaeratur, in qua illa formula fiat maxima vel minima, ex quo ipso casu nomen Problematis Isoperimetrici est natum; hoc autem nomen non impedivit, quominus eiusmodi quaestiones generaliores proponerentur, ut inter omnes eas curvas, quibus valor certae cuiuspiam formulae integralis $\int Vdx$ aeque conveniat, ea definiatur, in qua

formula $\int Z dx$ maximum minimumve sortiatur valorem, quin etiam conditiones adhuc fuerunt multiplicatae in hunc modum, ut tantum inter omnes eas curvas, quibus non solum formula $\int V dx$, sed etiam hae quotcunque $\int V' dx$, $\int V'' dx$ etc. aequaliter competant, ea definiatur, in qua $\int Z dx$ sit maximum vel minimum, cuiusmodi problemata tum temporis summopere ardua sunt visa. Postquam vero in tractatu meo de hoc argumento ostendissem huismodi problemata semper reduci posse ad hoc problema simplex, quo inter omnes plane lineas ea investigetur, in qua haec formula integralis

$$\int dx(Z + \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \text{etc.})$$

fiat maximum vel minimum, huius generis problemata nullam amplius habent difficultatem.

DE MOTU GRAVIUM CITISSIMO SUPER CURVIS SPECIE DATIS

Commentatio 444 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 17 (1772), 1773, p. 488—504
Summarium ibidem p. 34

SUMMARIUM

Etsi methodus maximorum et minimorum ita iam est exculta, ut non solum inter omnes omnino curvas, sed inter infinitas quoque, modo certa quadam indole communi sint praeditae, ea possit assignari, quae maximi minimive proprietate gaudeat: tamen si ista communis indoles in eo consistat, quod omnes istae curvae una eademque curvarum specie contineantur, fateri coguntur Geometrae methodum in hoc casu maxima vel minima investigandi fere prorsus latere. Huc referenda sunt ista duo problemata, circa quae evolvenda Celeberrimus Auctor in hac dissertatione versatur: scilicet datis in plano horizontali duobus punctis, invenire 1°. eum arcum circularem, deinde 2°. etiam eam semi-ellipsin, ut corpus grave super eo arcu vel circulari vel elliptico ex uno datorum punctorum descendens citissime ad alterum perveniat; in quibus casibus etsi Celeberrimo Auctori resolutio quodammodo successit, ea tamen in aliis casibus magis complicatis locum non invenit. Continet haec investigatio complura egregia calculi artificia atque istam quoque ob caussam omni Geometrarum attentione digna est, quia plurimum utique interest, quousque promoti sint Analyseos limites quaeque in ea adhuc desiderentur, sollicite annotari.

PROBLEMA 1

1. Datis in plano horizontali (Fig. 1) punctis A et B invenire eum arcum circularem APB, super quo corpus ex A descendendo citissime in B perveniat.

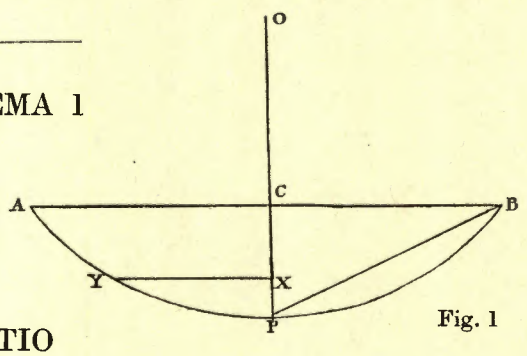


Fig. 1

SOLUTIO

Bisecta distantia AB in C sit $AC = BC = a$ ac per C ducta verticali PO sit O centrum arcus quaesiti eiusque radius $OA = OP = r$, erit

$$PC = r - \sqrt{(rr - aa)} = p \ ,$$

ut fiat $r = \frac{aa+pp}{2p}$, sumantur coordinatae orthogonales $PX = x$, $XY = y$, erit

$$y = \sqrt{(2rx - xx)} = \sqrt{\left(\frac{aa+pp}{p}x - xx\right)},$$

et elementum curvae

$$= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}},$$

quare, cum celeritas in Y sit $= \sqrt{(p-x)}$, erit elementum temporis

$$dt = \frac{rdx}{\sqrt{(p-x)(2rx-xx)}}$$

ita repraesentandum

$$dt = \frac{rdx}{\sqrt{(px-xx)(2r-x)}},$$

cuius integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 0$, si statuatur $x = p$, dabit tempus descensus per arcum AP, cuius duplum erit tempus motus ab A ad B, quod minimum esse oportet. Cum igitur sit

$$dt = \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}r}}{\sqrt{(px-xx)}}\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

erit per seriem infinitam

$$dt = \frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}r}}{\sqrt{(px-xx)}}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{r} + \frac{1\cdot3}{4\cdot8}\cdot\frac{xx}{rr} + \frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot8\cdot12}\cdot\frac{x^3}{r^3} + \text{etc.}\right).$$

At posito post integrationem $x = p$ fit $\int \frac{dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \pi$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$; tum vero est in genere

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \frac{2n-1}{2n}p\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(px-xx)}} - \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{(px-xx)},$$

quod postremum membrum facto $x = p$ evanescit. Quare cum sit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \pi,$$

erit

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(px-xx)}} = \tfrac{1}{2}\pi p$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\pi p^2$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\pi p^3$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(px-xx)}} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\pi p^4$$

etc.

Quibus valoribus substitutis obtinebimus tempus per AP

$$= \frac{\pi \sqrt{r}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{p}{r} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 8}\,\frac{pp}{rr} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot 12}\cdot\frac{p^3}{r^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{\pi \sqrt{r}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{p}{2r} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\left(\frac{p}{2r}\right)^2 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(\frac{p}{2r}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

Cum igitur sit

$$\frac{p}{2r} = \frac{pp}{(aa+pp)}, \quad \text{ob} \quad r = \frac{aa+pp}{2p},$$

si statuamus $\frac{p}{2r} = nn$, erit

$$pp = \frac{nnaa}{1-nn} \quad \text{et} \quad 2r = \frac{a}{n\sqrt{(1-nn)}}$$

hincque

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{n}\sqrt[4]{(1-nn)}}.$$

Vel posito potius $n = \frac{1}{m}$, ut sit

$$p = \frac{a}{\sqrt{(mm-1)}} \quad \text{et} \quad r = \frac{mma}{2\sqrt{(mm-1)}},$$

erit tempus per AP

$$= \frac{\pi m \sqrt{a}}{2\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right),$$

ubi m ita definiri debet, ut haec expressio minimum valorem consequatur. Quare ob

$$d\cdot\frac{m}{\sqrt[4]{(mm-1)}} = \frac{dm(\frac{1}{2}mm-1)}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}$$

habebitur per $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$ dividendo

$$\frac{\frac{1}{2}mm-1}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right) = 0,$$

quae multiplicata per $(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}$ praebet

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}mm + \frac{1^2}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^6}\\
&-1 \quad - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{m^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{m^6}\\
&-\frac{1^2}{2} \quad - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\frac{1}{m^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}\cdot\frac{1}{m^6}\\
&\quad + \frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\frac{1}{m^6}
\end{aligned}$$

nihilo aequandum; unde singuli termini collecti dabunt:

$$\tfrac{1}{2}mm - \frac{11}{2^2\cdot 2} - \frac{1^2\cdot 31}{2^2\cdot 4^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 59}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 95}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^6} - \text{etc.} = 0\,,$$

quae ad hanc reducitur:

$$1 - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{11}{m^2} - \frac{1^2\cdot 31}{2^2\cdot 4^2\cdot m^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 59}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot m^6} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 95}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot m^8} - \text{etc.} = 0\,,$$

ubi numeri 11, 31, 59, 95 sunt quadrati pares quinario minuti. Quo hinc valorem ipsius m eruamus, hanc aequationem ita repraesentemus:

$$1 = \frac{A}{m^2} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \text{etc.}$$

eruntque harum litterarum valores tam ipsi quam eorum logarithmi[1]):

$A = 2{,}7500000$	$lA = 0{,}4393327$
$B = 0{,}4843750$	$lB = 9{,}6851817$
$C = 0{,}2304687$	$lC = 9{,}3626120$
$D = 0{,}1449584$	$lD = 9{,}1612436$
$E = 0{,}1039755$	$lE = 9{,}0169309$
$F = 0{,}0803659$	$lF = 8{,}9050720$
$G = 0{,}0651991$	$lG = 8{,}8142416$
$H = 0{,}0547023$	$lH = 8{,}7380053$
$I = 0{,}0470380$	$lI = 8{,}6724492$
$K = 0{,}0412122$	$lK = 8{,}6150254$

Ex primo termino statim patet esse $mm > 2\frac{3}{4}$, verum tamen valor $mm = 3$ nimis magnus deprehenditur; ex quo mm intra limites 2,75 et 3,00 continetur.

Tribuamus ergo ipsi mm quosdam valores a veritate parum discrepantes et omnes terminos seriei colligamus, uti hinc videre licet:

1) Valores accuratiores inveniuntur in praefationis p. XXVI. A. S.

$mm = 2{,}94$	$mm = 2{,}95$
0,9353742	0,9322034
560386	556593
90692	89773
19402	19140
4734	4654
1245	1219
343	335
98	96
29	28
8	8
summa 1,0030682	0,9993883
error + 0,0030682	— 0,0006117

ex quibus binis erroribus concluditur valor vero proximus

$$mm = 2{,}94833 \ , \quad \text{hinc} \quad \sqrt{(mm - 1)} = 1{,}39581$$

et

$$CP = p = \frac{a}{1{,}39581} = 0{,}71643\, a$$

atque

$$PO = r = \frac{2{,}94833}{2 \,.\, 1{,}39581} a = 1{,}056136\, a \, ,$$

unde arcus AP continebit $71^\circ\ 14'\ 7\frac{3}{13}''$.

COROLLARIUM 1

2. Arcus ergo quaesitus APC ita commodissime describitur, ut per rectae AB punctum medium C ducta verticali capiatur

$$CP = 0{,}71643 \cdot AC \quad \text{seu} \quad CO = 0{,}33970 \cdot AC \ ,$$

eritque O centrum circuli describendi eiusque radius

$$OA = 1{,}056136 \cdot AC \ .$$

COROLLARIUM 2

3. Cum angulus BOP sit $71^\circ\ 14'\ 7\frac{3}{13}''$, si ducatur corda BP, erit angulus $CBP = 35^\circ\ 37'\ 3\frac{8}{13}''$, unde colligitur ipsa corda

$$BP = 1{,}2301315 \cdot AC \ .$$

Nulla autem harum rationum rationalis esse videtur.

SCHOLION

4. Tabulae logarithmorum, quibus in superiori calculo sum usus, vix sufficiunt, ut valorem ipsius mm accuratius definiamus. Interim tamen, cum is intra limites 2,948 et 2,949 contineatur, faciamus pro utroque calculos, qui ita se habent:

$mm = 2{,}948$	$mm = 2{,}949$
0,9328358	0,9325194
557349	556971
89956	89864
19193	19167
4670	4662
1224	1222
337	336
96	96
28	28
8	8
3	3
summa 1,0001222	0,9997551
error + 1222	— 2449

unde colligitur $mm = 2{,}94833288$, ita ut valor supra inventus tam prope ad veritatem accedat, ut hic vix certior aestimari queat; discrimen enim facile ab errore ultimarum notarum oriri potuit. Hinc foret $mm = \frac{1769}{600}$, cuius quippe valor est 2,948, neque propius veritatem assequi licet, nisi quis velit maioribus logarithmorum tabulis uti.

SCHOLION 2

5. Forsitan iuvabit ex invento hoc valore mm ipsum tempus descensus per arcum AP definivisse. Quia igitur erat

$$\frac{mma}{\sqrt{(mm-1)}} = 2r = 2{,}112272\,a\ ,$$

erit

$$\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt[4]{(mm-1)}} = 1{,}453365\,\sqrt{a}\ ;$$

et ob tempus per AP

$$= \frac{\pi m \sqrt{a}}{2\sqrt[4]{(mm-1)}} \left(1 + \frac{\alpha}{m^2} + \frac{\beta}{m^4} + \frac{\gamma}{m^6} + \frac{\delta}{m^8} + \text{etc.}\right)$$

singulos terminos per logarithmos evolvendo habebimus:

	$1 = 1{,}00000000$
$l\,\alpha = 9{,}3979400$	$\frac{\alpha}{m^2} = 0{,}08479368$
$l\,\beta = 9{,}1480625$	$\frac{\beta}{m^4} = 0{,}01617743$
$l\,\gamma = 8{,}9897000$	$\frac{\gamma}{m^6} = 0{,}00381040$
$l\,\delta = 8{,}8737161$	$\frac{\delta}{m^8} = 0{,}00098949$
$l\,\varepsilon = 8{,}7824011$	$\frac{\varepsilon}{m^{10}} = 0{,}00027197$
$l\,\zeta = 8{,}7068240$	$\frac{\zeta}{m^{12}} = 0{,}00007751$
$l\,\eta = 8{,}6424546$	$\frac{\eta}{m^{14}} = 0{,}00002267$
$l\,\theta = 8{,}5863971$	$\frac{\theta}{m^{16}} = 0{,}00000676$
$l\,\iota = 8{,}5367499$	$\frac{\iota}{m^{18}} = 0{,}00000205$
$l\,\varkappa = 8{,}4921971$	$\frac{\varkappa}{m^{20}} = 0{,}00000063$
	reliquae 26
	summa $= 1{,}10615285$

unde colligitur tempus per AP $= 0{,}803822 \cdot \pi\sqrt{a}$
et pro π substituto valore est . $= 2{,}525280 \cdot \sqrt{a}$
ideoque tempus per APB . . . $= 5{,}050560 \cdot \sqrt{a}$

SCHOLION 3

6. Problema hoc ideo notatu dignum videtur, quod solutio ex aequatione infinita, cuius radix investigari debet, sit petenda. Cum enim quaestio in genere, qua inter omnes omnino curvas ab A ad B ducendas ea quaeritur, super qua motus citissime absolvatur, methodo maximorum et minimorum expedite conficiatur, videri poterat, si eadem quaestio tantum ad arcus circulares restringatur, solutionem vix difficiliorem esse futuram; quod tamen multo

secus evenit. Quamobrem in doctrina maximorum et minimorum etiamnum methodus desideratur inter omnes tantum curvas, quae ad certam quandam speciem referantur, eam determinandi, quae certa quapiam maximi minimive proprietate sit praedita. In hoc quidem genere alia methodus adhuc non patet, nisi qua hic sum usus, qua ea quantitas, quae maxima minimave fieri debet, per seriem exprimitur, indeque more solito valor maximo minimove conveniens eruitur. Quodsi solutio problematis propositi ad eiusmodi numeros perduxisset, quorum certa quaedam proprietas agnosci potuisset, inde fortasse aliam methodum magis directam coniectura assequi licuisset; verum numeri inventi ita ab omni proportione cognita abhorrent, ut nullum vestigium aliter eo perveniendi pateat.

PROBLEMA 2

7. Datis in recta horizontali binis punctis A et B inter omnes semiellipses super axe AB describendas eam definire APB, super qua grave in A descendens citissime ad B perveniat.

SOLUTIO

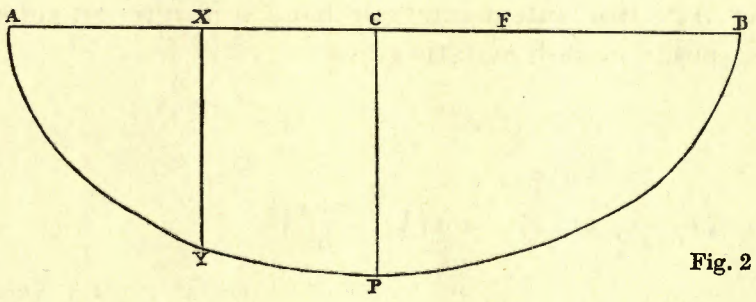


Fig. 2

Bisecta AB in C (Fig. 2) ponatur $CA = CB = a$, qui erit alter semi-axis ellipsis datus, quaesitus autem ponatur $CP = p$. Vocatis coordinatis $CX = x$, $XY = y$, erit

$$aayy + ppxx = aapp\ ;$$

unde

$$x = \frac{a}{p}\sqrt{(pp - yy)} \quad \text{et} \quad dx = -\frac{aydy}{p\sqrt{(pp - yy)}}\ .$$

Ergo elementum curvae in Y

$$= \frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{(pp - yy)}}\ .$$

Quare cum celeritas in Y sit $= \sqrt{y}$, erit temporis, quo arcus AY conficitur, elementum

$$\frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{y}(pp - yy)},$$

quod ita integrari debet, ut evanescat facto $y = 0$, tum vero posito $y = p$ habebitur tempus descensus per AP, quod minimum esse oportet.

Cum autem hinc series concinna elici nequeat, alteram variabilem x in calculum introducamus; et quia

$$y = \frac{p}{a}\sqrt{(aa - xx)}, \quad dy = -\frac{pxdx}{a\sqrt{(aa - xx)}}$$

hincque elementum curvae

$$= \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{a\sqrt{(aa - xx)}},$$

erit temporis elementum

$$= \frac{1}{\sqrt{ap}} \cdot \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}};$$

quod ita integratum, ut posito $x = 0$ evanescat, facto $x = a$ dabit tempus descensus per AP. Hoc autem integrale haud difficulter in seriem infinitam convertimus; posito enim brevitatis gratia

$$\frac{aa - pp}{aa} = n$$

erit

$$\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)} = aa\left(1 - \frac{nxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= aa\left(1 - \frac{1 \cdot nxx}{2aa} - \frac{1 \cdot 1 \cdot n^2x^4}{2 \cdot 4a^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3n^3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6a^6} - \text{etc.}\right),$$

unde fit elementum temporis

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}\left(1 - \frac{1 \cdot nxx}{2aa} - \frac{1 \cdot 1n^2x^4}{2 \cdot 4a^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3n^3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6a^6} - \text{etc.}\right).$$

Spectemus integrale $\int \frac{dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}$ ut datum sitque eius valor $= \frac{\alpha}{\sqrt{a}}$ casu $x = a$, et cum in genere sit

$$\int \frac{x^{\lambda+2}\,dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2(\lambda + 1)}{2\lambda + 3}a^2 \int \frac{x^\lambda dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} - \frac{2}{2\lambda + 3}x^{\lambda+1}\sqrt[4]{(aa - xx)}$$

erit casu $x = a$, ut sequitur

$$\int \frac{dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a}}$$
$$\int \frac{xxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} = \tfrac{2}{3}\alpha a \sqrt{a}$$
$$\int \frac{x^4 dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2\cdot 6}{3\cdot 7}\alpha a^3 \sqrt{a}$$
$$\int \frac{x^6 dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2\cdot 6\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 11}\alpha a^5 \sqrt{a} .$$

Hisque substitutis colligitur tempus per AP

$$= \frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}n - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6}{3\cdot 7}nn - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 11}n^3 - \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}n - \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 3}{3\cdot 7}nn - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 11}n^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}n^4 - \text{etc.}\right),$$

ubi ob $\frac{aa - pp}{aa} = n$ est $p = a\sqrt{(1 - n)}$ et $-2pdp = aadn$. Quare si ponamus brevitatis gratia hoc tempus:

$$\frac{\alpha a}{\sqrt{p}}(1 - An - Bnn - Cn^3 - Dn^4 - En^5 - \text{etc.}) ,$$

differentiatio praebet hanc aequationem

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} 0 = 1 & - & An - & Bn^2 - & Cn^3 - & Dn^4 - & En^5 \\ & -4A & -8B & -12C & -16D & -20E & -24F \\ & & +4A & +8B & +12C & +16D & +20E , \end{array}$$

quae reducitur ad

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{9}{7}An + \tfrac{17}{11}Bnn + \tfrac{25}{15}Cn^3 + \tfrac{33}{19}Dn^4 + \tfrac{41}{23}En^5 \quad \text{etc.}$$

seu

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{9}{7}\cdot n + \tfrac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1\cdot 3}{3\cdot 7}\cdot\tfrac{17}{11}nn + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 11}\cdot\tfrac{25}{15}n^5 + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}\cdot\tfrac{33}{19}n^4 + \text{etc.},$$

unde valor numeri n elici debet, quo invento est $p = a\sqrt{(1 - n)}$; in hunc finem, cum sit

$$A = \tfrac{1}{3}, \quad B = \tfrac{3}{14}A, \quad C = \tfrac{15}{33}B, \quad D = \tfrac{35}{60}C, \quad E = \tfrac{63}{95}D, \quad F = \tfrac{99}{138}E,$$
$$G = \tfrac{143}{189}F, \quad H = \tfrac{195}{248}G, \quad I = \tfrac{255}{315}H, \quad K = \tfrac{323}{390}I \quad \text{etc.},$$

habentur hi valores in logarithmis:

$$\begin{aligned} l\,A &= 9{,}5228787\,, & l\tfrac{9}{7}A &= 9{,}6320232\,,\\ l\,B &= 8{,}8538720\,, & l\tfrac{17}{11}B &= 9{,}0429282\,,\\ l\,C &= 8{,}5114494\,, & l\tfrac{25}{15}C &= 8{,}7332981\,,\\ l\,D &= 8{,}2773661\,, & l\tfrac{33}{19}D &= 8{,}5171264\,,\\ l\,E &= 8{,}0989830\,, & l\tfrac{41}{23}E &= 8{,}3500391\,,\\ l\,F &= 7{,}9547391\,, & l\tfrac{49}{27}F &= 8{,}2135714\,,\\ l\,G &= 7{,}8336133\,, & l\tfrac{57}{31}G &= 8{,}0981265\,,\\ l\,H &= 7{,}7291962\,, & l\tfrac{65}{35}H &= 7{,}9980416\,,\\ l\,I &= 7{,}6374258\,, & l\tfrac{73}{39}I &= 7{,}9096841\,,\\ l\,K &= 7{,}5555637\,, & l\tfrac{81}{43}K &= 7{,}8305802\,. \end{aligned}$$

Primum autem statim apparet esse $n<\frac{7}{9}$, quin etiam binis sumtis terminis primis $n<\frac{2}{3}$; quare considerentur limites $n=0{,}6$ et $n=0{,}7$, quibus fit:

	$n=0{,}6$	$n=0{,}7$
1	0,25714290	0,30000000
2	3974026	5409089
3	1168832	1856060
4	426316	789802
5	174099	376295
6	76292	192379
7	35090	103232
8	16720	57389
9	8185	32777
10	4094	19123
	0,31597944	0,38836146
cum seq.	4180	38246
summa	0,31602124	0,38874392
	0,33333333	0,33333333
error =	— 0,01731209	+ 0,05541059

ex quibus erroribus proxime colligitur $n = 0{,}6238$. Fiant ergo duae novae hypotheses:

	$n = 0{,}620$	$n = 0{,}625$
	0,26571430	0,26785720
	4243377	4312093
	1292627	1321107
	486064	501934
	205115	213520
	92880	97466
	44143	46697
	21736	23178
	10995	11820
	5682	6157
	0,32974150	0,33319692
	8523	9250
	0,32982673	0,33328942
	0,33333333	0,33333333
error	— 0,00350660	— 0,00004391

unde patet numerum n adeo maiorem esse quam 0,625 foretque satis exacte $n = 0{,}625063$, hinc

$$1 - n = 0{,}374937 \quad \text{et} \quad p = a\sqrt{(1-n)} = 0{,}61232 \cdot a \ ,$$

ita ut pro ellipsi quaesita sit

$$AC : CP = 1 : 0{,}61232 \ ,$$

quae ratio cum nulla cognita convenire videtur.

SCHOLION

8. Operae pretium videtur valorem ipsius n accuratius investigare, quoniam vidimus primis limitibus tantopere esse aberratum; conveniet igitur praeter valorem $n = 0{,}625$ alium assumi, qui praebeat errorem fere aequalem, at diversi signi, unde hae duae hypotheses considerentur:

	$n = 0{,}625$	$n = 0{,}6252$
	0,26785720	0,26794292
	4312093	4314855
	1321107	1322376
	501934	502579
	213520	213862
	97466	97653
	46697	46801
	23178	23237
	11820	11853
	6157	6177
	0,33319692	0,33333685
termini seqq.	7453	7474
	0,33327145	0,33341159
	0,33333333	0,33333333
error	— 0,00006188	+ 0,00007826

Hic etiam necesse est summam sequentium terminorum accuratius colligi, quae fere, uti est notata, reperitur. Ex deprehensis ergo erroribus colligitur verus valor $n = 0{,}6250883$, parum a praecedente discrepans; hincque $p = 0{,}6123001 \cdot a = CP$.

COROLLARIUM 1

9. Ea ergo ellipsis, quae hac minimi proprietate est praedita, ita definitur, ut, si semiaxis horizontalis $CA = BC$ ponatur $= a$, sit semiaxis coniugatus verticalis

$$CP = 0{,}6123001 \cdot a \ .$$

Tum vero distantia foci F a centro erit

$$CF = \sqrt{(aa - pp)} = a\sqrt{n} = 0{,}79062\, a$$

et semiparameter

$$= \frac{pp}{a} = (1 - n)\, a = 0{,}3749117\, a \ .$$

COROLLARIUM 2

10. Haec ellipsis species nullis rationibus cognitis continetur, neque enim ratio elementorum eius rationaliter neque per indolem circuli exprimi posse videtur; ita ut ista species omnino sit singularis neque aliis praeterea proprietatibus praedita existimanda.

SCHOLION

11. Ex his exemplis intelligitur, quam insignis adhuc pars methodi maximorum et minimorum iaceat inculta, cum, si species curvarum, ex quibus electio maximi minimive fieri debet, proponatur, alia via haud pateat, nisi ut radix ex aequatione infinita extrahatur. Atque in his quidem exemplis commode usu venit, ut termini istius aequationis infinitae satis promte convergant, quod si in aliis quaestionibus secus eveniat, multo maiori labore erit opus, quin etiam, si aequatio plures vel adeo infinitas involvat radices reales, resolutio completa ne expectanda quidem videtur. Quod eo magis mirum videri debet, cum methodus maximorum et minimorum iam ita sit exculta, ut non solum inter omnes omnino curvas, sed etiam inter infinitas tantum certa quadam indole praeditas, veluti quae sint eiusdem longitudinis vel eandem aream includant, ea assignari possit, cui maximi minimive proprietas quaedam conveniat. Nunc igitur intelligimus plurimum interesse, utrum curvae infinitae propositae communi quadam proprietate veluti eadem longitudine sint praeditae, an vero omnes certa quadam curvarum specie contineantur; hoc enim posteriori casu fateri cogimur methodum huiusmodi quaestiones resolvendi etiamnunc penitus latere; quae resolutio enim in casibus hic evolutis successit, in aliis magis complicatis locum omnino non invenit. Plurimum autem interesse arbitror, quaecunque adhuc in Analysi desiderantur, sollicite annotari.

CONSIDERATIONES CIRCA BRACHYSTOCHRONAS

Commentatio 501 indicis ENESTROEMIANI
Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1777: II, 1780, p. 70*—88

PROBLEMA 1

1. *Invenire curvas Brachystochronas AM, super quibus corpus brevissimo tempore ex A in M perveniat, dum scilicet a gravitate naturali animatum descensum in puncto A inchoat.*

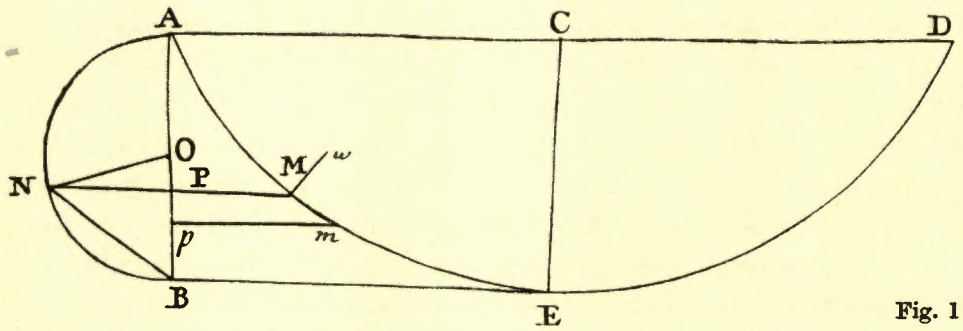


Fig. 1

SOLUTIO

Sumto axe AP verticali sint pro curva quaesita coordinatae $AP = x$ et $PM = y$, atque ex natura motus constat fore celeritatem in puncto $M = 2\sqrt{gx}$, denotante g altitudinem lapsus uno minuto secundo, ita ut formula $2\sqrt{gx}$ denotet spatium uno minuto secundo hac velocitate percurrendum. Quum nunc, posito $dy = pdx$, sit elementum curvae $Mm = dx\sqrt{(1 + pp)}$, erit tempus descensus per arcum AM

$$= \int \frac{dx\sqrt{(1 + pp)}}{2\sqrt{gx}}$$

idque in minutis secundis expressum; quae formula quum debeat esse minimum, si comparetur cum formula illa generali in dissertatione: *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi*[1]), scilicet cum $\int Z dx$, dat

1) Commentatio 420 indicis ENESTROEMIANI, huius voluminis p. 208. C. C.

$$Z = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{2\sqrt{gx}},$$

et quia ibi posuimus $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, habebimus pro nostro casu

$$M = -\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{4x\sqrt{gx}}, \quad N = 0, \quad P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1 + pp)}};$$

quare, ut prima pars variationis ad nihilum redigatur, fieri oportet

$$0 = N - \frac{dP}{dx}, \quad \text{hoc est} \quad \frac{dP}{dx} = 0,$$

unde fit $P = C$.

2. Ponatur ergo ad uniformitatem obtinendam

$$\frac{p}{2\sqrt{gx(1 + pp)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}},$$

ut fiat $p\sqrt{a} = \sqrt{x(1 + pp)}$, unde colligitur

$$p = \sqrt{\frac{x}{a - x}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + pp)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a - x)}};$$

nunc ob $dy = pdx$ pro curva quaesita nanciscimur hanc aequationem differentialem:

$$dy = dx\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(ax - xx)}},$$

pro cuius integrali inveniendo capiatur in axe intervallum $AB = a$ et super AB tamquam diametro describatur semicirculus ANB, in quo erit applicata $PN = \sqrt{(ax - xx)}$, hinc

$$d \cdot PN = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$$

et differentiale arcus

$$d \cdot AN = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}},$$

atque hinc colligimus

$$d \cdot AN - d \cdot PN = \frac{xdx}{\sqrt{(ax - xx)}} = dy,$$

unde patet esse $PM = y = AN - PN$; ex quo manifestum est curvam inventam esse cycloidem, provolutione circuli, cuius diameter est a, sub recta horizontali AC natam.

3. Deinde etiam patet arcum curvae quaesitae fore

$$AM = \int dx\sqrt{(1 + pp)} = \int \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a - x)}} = 2a - 2\sqrt{(aa - ax)}.$$

Iam vero, quum sit $BP = a - x$, ducta chorda BN media proportionalis inter BP et BA erit haec chorda $BN = \sqrt{(aa - ax)}$ sicque fit arcus $AM = 2AB - 2BN$. Promoveatur punctum P ad B usque, quo pacto curva AM porrigetur usque in E, eritque E punctum cycloidis imum, ibique applicata $BE =$ arcui ANB, tum vero arcus $AME = 2AB$; hinc ergo prodibit arcus $EM = 2BN$. Dehinc vero continuetur curva AME ultra E, donec ad horizontalem redeat in D, eritque $AD = 2ANB$.

4. Quoniam vero porro variatio continet membrum $dt \left(\frac{dy}{dt}\right) P$, ubi P est quantitas constans, evidens est hanc partem variationis non evanescere, nisi sit $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, atque hinc demum veram indolem huius quaestionis intelligimus, qua curva inventa AM non absolute inter omnes curvas, sed inter eas tantum, quae per utrumque terminum A et M transeunt, minimo gaudet tempore descensus.

5. Investigemus autem etiam ipsum tempus, quo corpus ex A ad M pertingit, quod hac formula exprimitur

$$= \int \frac{dx\sqrt{(1-pp)}}{2\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{gx(a-x)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int d \cdot AN,$$

sicque ipsum tempus per arcum AM in minutis secundis expressum $= \frac{AN}{\sqrt{ga}}$. Quare, si ratio diametri ad peripheriam statuatur $1 : \pi$, fiet arcus $ANB = \frac{1}{2}\pi a$; porro erit tempus descensus ad punctum imum per arcum $AE = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$, cuius duplum dabit tempus per arcum AED, quod ergo est $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, ipsum vero spatium $AD = \pi a$.

6. Notetur hic corpus, quod in A quieverat, per solam gravitatis actionem in locum D transferri posse, cogitationem quidem ab omni resistentia abstrahendo; atque si spatium hoc AD vocetur $= s$, ut sit $a = \frac{s}{\pi}$, tempus, quo hoc modo corpus ex A in D pertingit, erit $= \frac{\sqrt{\pi s}}{\sqrt{g}}$, quod ergo tempus erit unum minutum secundum, si capiatur $s = \frac{g}{\pi}$, atque hoc tempus est brevissimum, quo corpus ex A in D transferri potest, atque in genere corpus hoc modo per spatium quodcunque $AD = s$ transferetur eodem tempore, quo per altitudinem πs delabi potest.

7. Quoniam formula, quae in hac curva est minimum, erat $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, ea pertinet ad casum, quem in dissertatione citata paragrapho 43 sumus contemplati; quare, si ad nostram curvam in puncto M ducatur normalis $M\omega$, omnes curvae proximae ipsi AM, quae ad hanc rectam $M\omega$ terminantur, hanc quoque habebunt proprietatem, ut pro iis variatio sit nulla, hoc est ut omnes illae curvae aequalibus temporibus percurrantur, siquidem, quod probe notandum, omnes in eodem puncto A incipiant. Haec igitur recta $M\omega$, quae ab omnibus curvis proximis arcus synchronos abscindit, eos simul orthogonaliter secat.

8. Quoniam aequatio pro curva AM inventa $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ est adhuc differentialis, per integrationem praeter constantem a alia constans arbitraria ingredietur, qua effici potest, ut initium curvae in datum punctum A incidat; quare, si hoc punctum fuerit fixum, integrationem ita absolvi convenit, ut sumto $x = 0$ simul fiat $y = 0$. Quia autem adhuc constantem a pro arbitrio assumere licet, manifestum est aequationem nostram infinitas continere lineas curvas, omnes scilicet cycloides a circulis quibuscunque genitas et in eodem puncto A inchoantes, quae omnes inter se sunt similes; atque hinc sequens Problema resolvere poterimus.

PROBLEMA 2

9. *Descriptis super recta horizontali AD infinitis cycloidibus, quae omnes in eodem puncto A incipiant, invenire lineam curvam, quae omnes has cycloides ad angulos rectos traiiciat.*

SOLUTIO

10. Sit curva AM (Fig. 1) una quaecunque harum cycloidum, quae nata sit ex circulo ANB, cuius diameter ergo vel radius hic ut variabilis est considerandus, ut ex eius variatione generatio omnium reliquarum cycloidum intelligi possit. Quum igitur quaestio huc sit reducta, ut ab omnibus his cycloidibus arcus synchronos AM abscindi oporteat, tempus autem descensus per arcum AM supra ita expressum sit inventum $= \frac{AN}{\sqrt{ga}} = \frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}}$, in omnibus his circulis utcunque variatis perpetuo tantos arcus AN abscindi oportet, ut fiat $\frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}}$ quantitas constans; tum vero ex singulis punctis N reperientur totidem puncta M sumendo $PM = AN - PN$ sive concin-

nius $NM = AN$, atque omnia haec puncta M determinabunt traiectoriam, quam quaerimus.

11. Ponamus huius circuli indefiniti radium $AO = BO = r$, ut sit $AB = 2r$, et vocemus angulum $AON = \varphi$, eritque arcus $AN = r\varphi$ et applicata $PN = r \sin \varphi$, abscissa vero $AP = r(1 - \cos \varphi)$, quae si vocetur $= x$ eique respondens applicata traiectoriae $PM = y$, iam habebimus has determinationes:

$$x = r(1 - \cos \varphi) \quad \text{et} \quad y = r(\varphi - \sin \varphi).$$

Verum hic talis relatio inter r et φ subsistere debet, ut fractio

$$\frac{AN}{\sqrt{g \cdot AB}} = \frac{r\varphi}{\sqrt{2gr}} = \frac{\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$$

semper constantem obtineat valorem.

12. Statuamus ergo $\varphi\sqrt{r} = \sqrt{c}$, ut fiat $r = \frac{c}{\varphi^2}$, quo valore introducto pro coordinatis traiectoriae quaesitae habebimus has formulas:

$$AP = x = \frac{c}{\varphi^2}(1 - \cos \varphi) \quad \text{et} \quad PM = y = \frac{c}{\varphi} - \frac{c \sin \varphi}{\varphi^2} = \frac{c}{\varphi^2}(\varphi - \sin \varphi).$$

Hinc autem pro directione curvae cognoscenda iuvabit etiam differentialia adnotasse, quae reperiuntur:

$$dx = cd\varphi\left(\frac{\varphi \sin \varphi - 2 + 2\cos \varphi}{\varphi^3}\right), \quad dy = cd\varphi\left(\frac{-\varphi - \varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{\varphi^3}\right),$$

unde anguli, quem tangens traiectoriae in M facit cum axe AB, tangens prodit:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi - \varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{2 - 2\cos \varphi - \varphi \sin \varphi} = \frac{\varphi(1 + \cos \varphi) - 2 \sin \varphi}{\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)},$$

quae fractio reducitur ad hanc:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\varphi(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)},$$

ita ut habeamus $\frac{dy}{dx} = -\cot \frac{1}{2}\varphi$; unde patet angulum illum, cuius tangens est $-\frac{dy}{dx}$, fore $= 90° - \frac{1}{2}\varphi$. Hinc porro, si elementum curvae vocetur ds, erit $\frac{dx}{ds} = \sin \frac{1}{2}\varphi$ et $\frac{dy}{ds} = -\cos \frac{1}{2}\varphi$, unde colligitur

$$ds = cd\varphi \frac{(\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi))}{\varphi^3 \sin \frac{1}{2}\varphi}$$

$$= 2cd\varphi \frac{(\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - 2 \sin \frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3},$$

unde per reductiones obtinemus:

$$\frac{s}{2c} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} + \int\frac{1}{2}\frac{d\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} - \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} - \frac{1}{4}\int\frac{d\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi};$$

denique radius osculi traiectoriae in puncto M est

$$4c\frac{(\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3},$$

qui ergo etiam hoc modo exprimi potest:

$$\frac{2ds}{d\varphi} = \frac{2dx}{d\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi} = -\frac{2dy}{d\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi} = -\frac{dx}{d\cdot\cos\frac{1}{2}\varphi} = +\frac{dy}{d\cdot\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

13. His praenotatis in praecipua symptomata et proprietates huius traiectoriae inquiramus, ac primo quidem sumamus angulum $\varphi = 0$ seu infinite parvum, atque reperiemus abscissam $x = \frac{c}{2}$ et applicatam $y = 0$. Sumatur ergo (Fig. 2) in axe verticali altitudo $AG = \frac{1}{2}c$, eritque punctum G initium traiectoriae sursum vergentis, quae ad verticalem erit normalis ob $\frac{dy}{dx} = \infty$; at vero radius osculi in hoc puncto G erit

$$4c\frac{(\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\frac{1}{2}\varphi)}{\varphi^3}$$

posito $\varphi = 0$, qui valor reperitur $= \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}AG$. Hic notasse iuvabit tempus descensus per hanc altitudinem AG praecise convenire cum tempore omnium arcuum synchronorum AM.

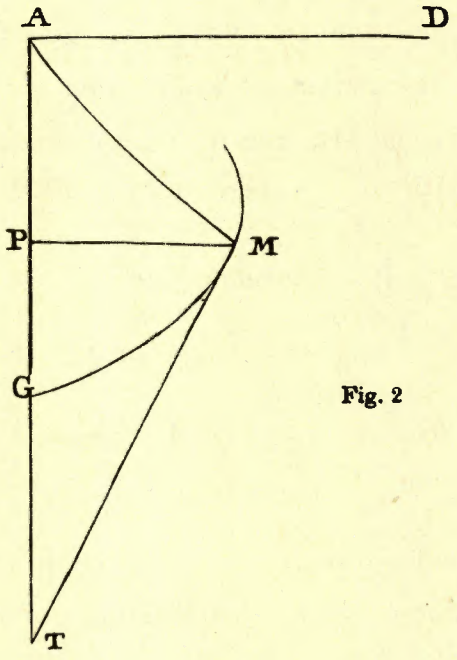


Fig. 2

14. Crescente angulo φ curva haec sursum flectitur, ad cuius tractum cognoscendum sumamus angulum $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$, eritque $\sin\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, unde abscissa $x = \frac{4c}{\pi^2}$ et applicata $y = \frac{4c}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; hoc porro loco $-\frac{dy}{dx} = 1$, quod indicat tangentem in hoc puncto cum applicata angulum semirectum facere. Hic vero radius osculi erit $\frac{16c(\pi - 4)}{\pi^3\sqrt{2}}$ vel mutato signo,

uti etiam pro puncto G fecimus, erit radius osculi $= \frac{16c(4-\pi)}{\pi^3\sqrt{2}}$, cuius valor est propemodum $0{,}313 \cdot c$ ideoque paulisper minor, quam in puncto G.

15. Sumamus nunc $\varphi = 180° = \pi$, et abscissa prodibit $x = \frac{2c}{\pi\pi}$ et applicata $y = \frac{c}{\pi}$; tum vero fit $-\frac{dy}{dx} = 0$, unde tangens curvae in hoc puncto erit verticalis ac propterea ista applicata PM omnium maxima. Per fractiones autem decimales pro hoc puncto reperitur abscissa $x = 0{,}2026 \cdot c$ et $y = 0{,}318 \cdot c$. Radius osculi denique in hoc puncto colligitur mutato signo $= \frac{8c}{\pi^3}$ proxime $= 0{,}258 \cdot c$ sicque curvatura continuo diminuitur.

16. Ponamus nunc $\varphi = 2\pi$, ut fiat $\sin \frac{1}{2}\varphi = 0$, $\cos \frac{1}{2}\varphi = -1$; ibi ergo erit abscissa $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{2\pi}$. Hic ergo curva ad summam lineam horizontalem pertingit eiusque distantia a puncto A semissis est applicatae maximae, quippe quae erat $\frac{c}{\pi}$. Quum vero hic fiat $-\frac{dy}{dx} = \infty$, tangens curvae erit ipsa recta horizontalis suprema. Hoc porro loco radius osculi colligitur $= \frac{c}{\pi\pi}$, proxime $= 0{,}101 \cdot c$, ita ut adhuc curvatura diminuatur.

17. Statuamus porro $\varphi = 3\pi$, ut fiat

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = -1 \quad \text{et} \quad \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 0 .$$

Pro hoc ergo loco fit abscissa $x = \frac{2c}{9\pi^2}$, proxime $= 0{,}022 \cdot c$ et applicata $y = \frac{c}{3\pi}$; tum vero ob $-\frac{dy}{dx} = 0$ tangens in hoc loco erit verticalis atque radius osculi $= -\frac{8c}{9\pi^3}$, unde curva iam curvaturam mutavit et, antequam huc pervenit, alicubi radius osculi evanuerit necesse est, quod evenit sumendo $\varphi = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$. Ad hunc locum inveniendum ponamus fuisse $\varphi = 3\pi - \omega$ eritque

$$3\pi - \omega = 2 \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \cot \tfrac{1}{2}\omega ,$$

unde patet angulum ω esse satis parvum. Ibi vero curva punctum flexus contrarii habuerit necessum est, ex quo sursum reflectendo ad eum locum pertingit, quem hic definivimus.

18. Ponendo iam $\varphi = 4\pi$, quo casu fit

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 1 ,$$

abscissa evadit $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{4\pi}$, hicque tangens iterum fit horizontalis ob $-\frac{dy}{dx} = \infty$; radius osculi vero reperitur $= -\frac{c}{4\pi\pi}$, qui scilicet est negativus ob cuspidem praecedentem. Hic ergo curvatura quadruplo maior est, quam casu $\varphi = 2\pi$.

19. Ponamus nunc in genere $\varphi = 2n\pi$, existente n numero integro quocunque, et ob $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = 1$ erit abscissa $AP = x = 0$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{2n\pi} = \frac{0{,}159155 \cdot c}{n},$$

deinde quum sit

$$-\frac{dy}{dx} = \cot \tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{tang} ATM ,$$

ita ut sit angulus $ATM = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, erit hic angulus $ATM = 90° - n\pi$, hoc est rectus, seu tangens MT erit horizontalis; tum vero radius osculi in hoc loco erit

$$= -\frac{c\cos n\pi}{nn\pi\pi} = -\frac{0{,}101321 \cdot c\cos n\pi}{nn},$$

ubi $\cos n\pi$ est vel $+1$ vel -1, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

20. At si fuerit $\varphi = (2n+1)\pi$, ob $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$ erit abscissa

$$AP = x = \frac{2c}{(2n+1)^2\pi\pi} = \frac{0{,}202642 \cdot c}{(2n+1)^2}$$

et applicata

$$PM = y = \frac{c}{(2n+1)\pi} = \frac{0{,}318310 \cdot c}{2n+1},$$

deinde vero prodit angulus ATM

$$= 90° - \tfrac{1}{2}\varphi = 90° - \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

sive tangens in his locis erit verticalis. Radius osculi denique reperitur

$$= \frac{8c\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}{(2n+1)^3 \cdot \pi^3} = \frac{0{,}258012\, c\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{(2n+1)^3},$$

ubi $\sin(n + \frac{1}{2}\pi)$ est vel $+1$ vel -1, prouti numerus n fuerit vel par vel impar.

21. Iam observavimus paulisper ante ista loca radium osculi evanescere ibique curvam cuspide esse donatam; singulas igitur has cuspides investigasse operae erit pretium. Ex formula autem generali liquet radium osculi evanescere, quoties fuerit

$$\varphi = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} ,$$

quae aequatio innumerabiles admittit solutiones, uti mox videbimus. Nunc autem pro his casibus statim manifestum est fore

$$\text{abscissam } x = \frac{c \sin \varphi^2}{4(1 - \cos \varphi)} = \frac{c(1 + \cos \varphi)}{4} \quad \text{et} \quad \text{applicatam } y = \tfrac{1}{4} c \cdot \sin \varphi ;$$

tum vero in his cuspidibus tangens ad verticalem inclinatur angulo $= 90° - \frac{1}{2}\varphi$ atque adeo ad horizontalem AD angulo $= \frac{1}{2}\varphi$.

22. Quoniam istae cuspides reperiuntur in locis, ubi angulus φ aliquanto minor est quam $(2n + 1)\pi$, ad eas inveniendas ponamus

$$\varphi = (2n + 1)\pi - 2\omega ,$$

ut sit $\frac{1}{2}\varphi = (n + \frac{1}{2})\pi - \omega$, qui ergo arcus aequari debet

$$= \operatorname{tang}((n + \tfrac{1}{2})\pi - \omega) = \frac{1}{\operatorname{tang} \omega} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} ,$$

ita ut habeatur haec aequatio:

$$(n + \tfrac{1}{2})\pi - \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} ,$$

ex qua quaeri oportet omnes valores anguli ω; ubi statim apparet, si numerus n esset infinitus, fore $\omega = 0$; ex quo intelligitur, quo maior fit numerus n, eo minorem prodire angulum ω. Ponamus ergo brevitatis gratia $(n + \frac{1}{2})\pi = \alpha$ et multiplicando per $\sin \omega$ habebimus

$$\alpha \sin \omega - \omega \sin \omega = \cos \omega ;$$

sed quia angulus ω est satis exiguus ideoque vero proxime

$$\sin \omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \quad \text{et} \quad \cos \omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 ,$$

nostra aequatio hanc induet formam:

$$0 = 1 - \alpha\omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{6}\alpha\omega^3 - \tfrac{1}{8}\omega^4 - \tfrac{1}{120}\alpha\omega^5 + \tfrac{1}{144}\omega^6 + \tfrac{1}{5040}\alpha\omega^7 .$$

23. Si termini post duos priores negligantur, sequitur $\omega = \frac{1}{\alpha}$, qui ergo est valor prope verus; pro vero ergo ponamus

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\alpha^3} + \frac{B}{\alpha^5} + \frac{C}{\alpha^7} ,$$

cuius potestates dabunt

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2A}{\alpha^4} + \frac{2B + AA}{\alpha^6}$$

$$\omega^3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{3A}{\alpha^5} + \frac{3AA + 3B}{\alpha^7}$$

$$\omega^4 = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{4A}{\alpha^6}$$

$$\omega^5 = \frac{1}{\alpha^5} + \frac{5A}{\alpha^7}$$

$$\omega^6 = \frac{1}{\alpha^6}$$

$$\omega^7 = \frac{1}{\alpha^7}$$

Substituantur igitur isti valores et termini in columnas disponantur secundum potestates ipsius α sequenti modo:

$\frac{1}{\alpha^0}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha^6}$
1			
-1	$-A$	$-B$	$-C$
	$+\frac{1}{2}$	$+1A$	$+\frac{2B + AA}{2}$
	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2}A$	$+\frac{AA}{2} + \frac{B}{2}$
		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}A$
		$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}A$
			$+\frac{1}{144}$
			$+\frac{1}{5040}$

Quia prima columna per se evanescit, singulae sequentium seorsim ad nihilum redigantur, unde prodibunt sequentes aequationes:

$$-A + \tfrac{2}{3} = 0\,,\quad -B + \tfrac{3}{2}A - \tfrac{2}{15} = 0\,,\quad -C + \tfrac{3}{2}B + AA - \tfrac{13}{24}A + \tfrac{1}{140} = 0\,.$$

Ex harum prima reperitur $A = \frac{2}{3}$, qui valor substitutus in secunda dat

$$B = \tfrac{13}{15} \quad \text{et} \quad -C + \tfrac{13}{10} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{13}{36} + \tfrac{1}{140} = 0\,,$$

unde $C = \frac{146}{105}$.

24. His itaque inventis angulus quaesitus ω ita exprimitur, ut sit

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha^3} + \frac{13}{15\cdot\alpha^5} + \frac{146}{105\cdot\alpha^7}$$

existente $\alpha = (2n + \frac{1}{2})\pi$; ubi notandum est arcum ω hoc modo exprimi in partibus radii; unde is in minutis secundis reperietur, si a logarithmo ω subtrahatur 4,6855749. Hanc autem reductionem statim obtinebimus, si a logarithmis numeratorum illorum quatuor hic logarithmus constans statim subtrahatur; scilicet

primae fractionis logarithmus est	$5{,}3144251 - l\alpha$,
secundae fractionis logarithmus est	$5{,}1383338 - 3l\alpha$,
tertiae partis logarithmus est	$5{,}2522772 - 5l\alpha$,
et logarithmus quartae fractionis	$5{,}1712615 - 7l\alpha$.

25. Sumamus nunc pro n successive 1, 2, 3, 4 etc. et, quum sit $\pi = 3{,}14159265$ etc., habebimus sequentes valores pro logarithmo α:

				unde reperitur
si	$n = 1$	erit	$\mathrm{Log}\,\alpha = 0{,}6732411$	$\omega = 12^\circ\ 32'\ 24''$
si	$n = 2$	erit	$\mathrm{Log}\,\alpha = 0{,}8950898$	$\omega = 7^\circ\ 22'\ 32''$
si	$n = 3$	erit	$\mathrm{Log}\,\alpha = 1{,}0412178$	$\omega = 5^\circ\ 14'\ 23''$
si	$n = 4$	erit	$\mathrm{Log}\,\alpha = 1{,}1503623$	$\omega = 4^\circ\ 3'\ 59''$
si	$n = 5$	erit	$\mathrm{Log}\,\alpha = 1{,}2375225$	$\omega = 3^\circ\ 19'\ 24''$

26. Quum igitur posuissemus $\varphi = (2n + 1)\,\pi - 2\,\omega$, pro qualibet cuspide habebimus abscissam

$$x = \tfrac{1}{4}c(1 - \cos 2\,\omega) = \tfrac{1}{2}c \sin \omega^2$$

et applicatam

$$y = \tfrac{1}{4}c \sin 2\,\omega = \tfrac{1}{2}c \sin \omega \cos \omega ,$$

ita ut sit $\frac{x}{y} = \mathrm{tang}\ \omega$; deinde vero angulus $ATM = \omega - n\pi = n\pi + \omega$ seu simpliciter $= \omega$, ex quibus singularum cuspidum positio innotescit.

PROBLEMA 3

27. *In genere investigare curvas Brachystochronas, quomodocunque celeritates per binas coordinatas x et y determinentur.*

SOLUTIO

28. Sit curva AM brachystochrona quaesita, in cuius puncto M sit celeritas functio quaecunque coordinatarum x et y, quam ponamus $= \frac{1}{v}$,

sitque $dv = mdx + ndy$. Quia igitur tempus per arcum AM est

$$\int v dx \sqrt{(1 + pp)}$$

idque debet esse minimum, in forma nostra generali fit $Z = v\sqrt{(1 + pp)}$ hincque

$$M = m\sqrt{(1 + pp)}\,, \quad N = n\sqrt{(1 + pp)} \quad \text{et} \quad P = \frac{vp}{\sqrt{(1 + pp)}}\,;$$

quare quum pro curva quaesita sit $0 = N - \frac{dP}{dx}$, habebimus sequentem aequationem

$$0 = ndx\sqrt{(1 + pp)} - d \cdot \left(\frac{vp}{\sqrt{(1 + pp)}}\right)$$
$$= ndx\sqrt{(1 + pp)} - \frac{p(mdx + ndy)}{\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{vdp}{(1 + pp)^{3:2}}\,,$$

quae reducitur ad hanc formam

$$\frac{ndx - mdy}{v} = \frac{dp}{1 + pp}\,,$$

quam quibusnam in casibus integrare liceat, investigemus.

29. Ut priorem partem integrabilem reddamus, multiplicemus per

$$\frac{dv}{ndx - mdy} = \frac{mdx + ndy}{ndx - mdy} = \frac{m + np}{n - mp}\,,$$

ut prodeat hac aequatio

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(m + np)}{(1 + pp)(n - mp)}\,,$$

cuius statim duo se offerunt casus, quibus ea integrationem admittit: alter, si $n = 0$, alter vero, si $m = 0$; quos ambos data opera evolvamus.

30. Sit igitur primo $n = 0$, quod evenit, si v fuerit functio ipsius x tantum, quae sit $v = X$; ac tum aequatio nostra erit:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p(1 + pp)}\,,$$

cuius integrale est

$$LX = L\sqrt{(1 + pp)} - Lp + LA\,,$$

sicque fiet $X = \frac{A\sqrt{(1 + pp)}}{p}$, unde colligitur

$$p = \frac{A}{\sqrt{(XX - AA)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + pp)} = \frac{X}{\sqrt{(XX - AA)}}\,;$$

tum vero ob $dy = pdx$ aequatio pro brachystochrona resultat

$$dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} ;$$

ubi notandum constantem arbitrariam A infinitas huiusmodi brachystochronas comprehendere. Sequens autem integratio ita expediri potest, ut curva in dato puncto, verbi gratia in A, incipiat; at vero formula minimi pro hoc casu erit .

$$\int \frac{X^2 dx}{\sqrt{(XX - AA)}} .$$

31. Sit iam $m = 0$ sive v functio solius y, quae sit $v = Y$, atque nostra aequatio fit:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dY}{Y} = \frac{pdp}{1 + pp} ,$$

cuius integrale est

$$LC = L\sqrt{(1 + pp)} + LA \quad \text{sive} \quad Y = A\sqrt{(1 + pp)} ,$$

unde fit

$$p = \frac{\sqrt{(YY - AA)}}{A} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + pp)} = \frac{Y}{A} .$$

Hinc ob $p = \frac{dy}{dx}$ aequatio inter coordinatas colligitur

$$dx = \frac{A\,dy}{\sqrt{(YY - AA)}} ;$$

at formula minimi pro his curvis erit

$$\int \frac{Y^2 dy}{\sqrt{(YY - AA)}} ,$$

qui casus a praecedente prorsus non discrepat et ex eo per solam commutationem coordinatarum immediate deduci potuisset. Caeterum hic iterum effici potest, ut omnes istae curvae in eodem dato puncto incipiant.

32. Praeter hos autem duos casus datur adhuc tertius hoc modo eruendus: alterum membrum $\frac{dp(m + np)}{(1 + pp)(n - mp)}$ resolvetur in duas fractiones, quarum alterius denominator sit $1 + pp$, alterius vero $n - mp$, atque elicietur ista aequatio:

$$\frac{dv}{v} = \frac{pdp}{1 + pp} + \frac{mdp}{n - mp} ,$$

quae manifesto est integrabilis, si fuerit $m = x$ et $n = y$, quod idem evenit,

si fuerit $m = sx$ et $n = sy$; tum enim aequatio nostra

$$\frac{dv}{v} = \frac{pdp}{1+pp} + \frac{xdp}{y-px}$$

integrata dat $$Lv = L\sqrt{(1+pp)} - L(y-px) + LA$$

sive $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Iam vero quantitatem v ex hac conditione definiri oportet:

$$dv = s(xdx + ydy) ;$$

unde perspicuum est s esse debere functionem ipsius $\sqrt{(xx+yy)}$, unde etiam v aequabitur functioni eiusdem formulae $\sqrt{(xx+yy)}$. Hic quidem evidens est loco x et y sumi potuisse $x+a$ et $y+b$: at quia hoc non curvae mutarentur, sed tantum positio axis, hanc varietatem considerare superfluum foret. Quare, si initium harum curvarum detur, veluti in A, tum non opus est, ut pro hoc puncto sit $x = 0$ et $y = 0$, sed quantitates constantes quaecunque admitti possunt.

33. Quodsi ergo v fuerit functio quaecunque quantitatis $\sqrt{(xx+yy)}$, pro brachystochronis habebimus hanc aequationem:

$$v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)} ,$$

ex qua elicimus

$$p = \frac{vvxy \pm A\sqrt{(vv(xx+yy) - AA)}}{vvxx - AA} .$$

Quia nunc $p = \frac{dy}{dx}$, nanciscimur hanc aequationem differentialem:

$$dy(vvxx - AA) = vvxydx \pm Adx\sqrt{(vv(xx+yy) - AA)} ,$$

quam autem quomodo tractare oporteat, ex hac forma vix patet.

34. Utamur autem sequenti substitutione: ponamus

$$\sqrt{(xx+yy)} = u \quad \text{et} \quad y = tx ,$$

ita ut aequatio ad binas tantum variabiles t et u sit reducenda; at per eas x et y ita determinantur, ut sit

$$x = \frac{u}{\sqrt{(1+tt)}} \quad \text{et} \quad y = \frac{tu}{\sqrt{(1+tt)}} ,$$

ex quorum differentialibus colligitur

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{tdu(1+tt) + udt}{du(1+tt) - utdt} ,$$

qui valores in superiori expressione pro p inventa substituti praebent

$$\frac{tdu(1+tt)+udt}{du(1+tt)-utdt} = \frac{vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}}{vvuu-AA(1+tt)},$$

quae a fractionibus liberata abit in hanc:

$$\begin{aligned} &udt(vvuu-AA(1+tt))+tdu(1+tt)(vvuu-AA(1+tt)) \\ &\quad = -utdt(vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}) \\ &+ du(1+tt)(vvtuu \pm A(1+tt)\sqrt{(vvuu-AA)}) \end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned} 0 &= udt(1+tt)(vvuu-AA \pm At\sqrt{(vvuu-AA)}) \\ &- Adu(1+tt)^2(At \pm \sqrt{(vvuu-AA)}) . \end{aligned}$$

Haec aequatio reducitur ad hanc:

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{Adu(At \pm \sqrt{(vvuu-AA)})}{u(vvuu-AA \pm At\sqrt{(vvuu-AA)})},$$

quae manifesto in hanc formam transfunditur:

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm\frac{Adu}{u\sqrt{(vvuu-AA)}},$$

ubi ambae variabiles t et u a se invicem sunt separatae, ideoque hinc curvas construere licet.

35. Num autem praeter hos casus alii adhuc dentur, qui constructionem admittant, merito dubitamus, nisi forte quis adiungere velit eiusmodi casus, qui per immutationem coordinatarum resultant, dum ipsae lineae curvae prorsus manent eaedem. Ita aequatio primo inventa

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$$

etiam integrabilis evadit sumendo $m = \alpha s$ et $n = \beta s$, siquidem hinc oritur ista aequatio:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(\alpha+\beta p)}{(1+pp)(\beta-\alpha p)} = \frac{pdp}{1+pp} + \frac{\alpha dp}{\beta-\alpha p},$$

cuius integrale fit

$$Lv = L\sqrt{(1+pp)} - L(\beta-\alpha p) + LA \quad \text{sive} \quad v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{\beta-\alpha p}.$$

Quoniam vero tum fit $dv = s(\alpha dx + \beta dy)$, evidens est quantitatem v fore functionem formulae $\alpha x + \beta y$. Unde si coordinatae ita mutentur, ut $\alpha x + \beta y$ iam fiat ipsa abscissa, habebitur casus, quo v est functio quaecunque abscissae, qui igitur convenit cum casu nostro primo.

36. Calculus hic non parum molestus facilius ita expediri potest. Quum sit

$$p = \frac{tdu(1+tt)+udt}{du(1+tt)-utdt},$$

erit

$$y - px = -\frac{uudt\sqrt{(1+tt)}}{du(1+tt)-utdt} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(1+tt)((1+tt)du^2+uudt^2)}}{du(1+tt)-utdt},$$

unde aequatio primo inventa

$$v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)}$$

transmutatur in hanc:

$$-vuudt = A\sqrt{((1+tt)du^2+uudt^2)},$$

ex qua sumtis quadratis elicitur

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm\frac{Adu}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

prorsus ut ante. Caeterum evidens est hanc curvam esse brachystochronam pro vi centripeta functioni cuicunque distantiarum proportionali.

37. In his igitur tribus casibus solutionem perducere licuit ad aequationes differentiales primi gradus, quae ob constantem A, si ea successive varietur, infinitas curvas huius generis complectuntur; atque si hae aequationes denuo integrentur, nova constans introducenda ex dato cuiusque curvae initio A definiri poterit. Hoc modo ergo effici potest, ut omnes illae infinitae brachystochronae ex eodem puncto A originem ducant, atque ad hunc casum sequens Problema est accommodatum.

PROBLEMA 4

38. *Descriptis in plano* (Fig. 3) *infinitis brachystochronis AM invenire curvas, quae illas omnes orthogonaliter traiiciant.*

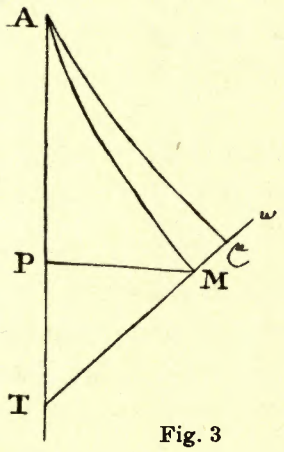


Fig. 3

SOLUTIO

39. Sit AM una harum brachystochronarum quaecunque, ad quam in puncto M constituatur recta normalis Ma, atque supra ostendimus, si infinitae aliae lineae $A\mu$, ipsi AM proximae et ad hanc rectam Ma terminatae, quae quidem in eodem puncto A incipiant, concipiantur, tum variationem temporis pro iis omnibus fore nullam sive tempus per curvam

proximam $A\mu$ praecise aequale esse tempori per AM, ubicunque punctum μ in recta Ma accipiatur, dummodo ipsi M fuerit proximum. Verum ne opus sit demonstrationem huius veritatis altius repetere, hic eam succinctius ex ipsa natura brachystochronismi doceamus.

40. Demonstrandum scilicet est: ut arcus proximi (Fig. 4[I]) AM et $A\mu$ sint isochroni, elementum $M\mu$ necessario ad utramque curvam normale esse debere. Si quis enim hoc negaverit, ei statuendum est angulum $AM\mu$ vel esse acutum vel obtusum; utrumque autem ad absurdum sequenti modo deducetur. Sit enim primo angulus $AM\mu$ acutus, et ad $M\mu$ ex puncto μ agatur normalis $\mu\alpha$ curvae AM in α occurrens, eritque $\alpha\mu < \alpha M$; unde si corpus percurrat viam $A\alpha\mu$, eam absolvet breviori tempore, quam viam $A\alpha M$, quia utrinque in α celeritas est eadem, at spatium $\alpha\mu$ brevius quam αM. Quum igitur per hypothesin tempus per curvam $A\mu$ aequale sit tempori per AM, nunc tempus per $A\alpha\mu$ brevius foret quam tempus per $A\mu$, ideoque ipsa linea $A\mu$ non fore brachystochrona, quod est contra hypothesin, quandoquidem hic assumimus curvam $A\mu$ esse brachystochronam ipsi AM proximam.

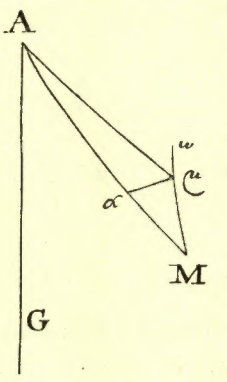


Fig. 4[I]

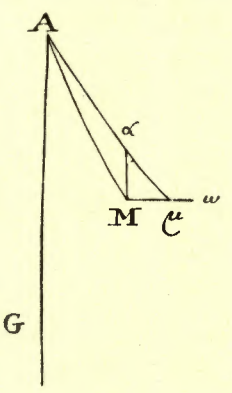


Fig. 4[II]

41. Simili modo (Fig. 4[II]), si angulus $AM\mu$ fuerit obtusus, ad $M\mu$ ex puncto M agatur normalis $M\alpha$, erit $\alpha M < \alpha\mu$; unde tempus per viam $A\alpha M$ brevius foret quam per $A\alpha\mu$, ideoque etiam brevius quam per AM, ideoque curva AM non foret brachystochrona, itidem contra hypothesin. Ex quo conficitur lineolam $M\mu$ necessario ad utramque brachystochronam AM et $A\mu$ esse perpendicularem.

42. Quodsi ergo ab omnibus nostris brachystochronis (Fig. 3) arcus synchronos AM et $A\mu$ abscindamus, qui scilicet omnes eodem tempore absolvantur, tum omnia puncta $M\mu$ reperientur in eiusmodi linea curva, quae omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit. Quum igitur tempus elementare supra fuerit $vdx\sqrt{(1+pp)}$, a qualibet brachystochronarum AM rescindatur arcus AM, pro quo formula integralis $\int vdx\sqrt{(1+pp)}$ nanciscatur valorem datum, puta C. Ex quo simul perspicuum est, si etiam haec quantitas C varietur, hoc modo infinitas traiectorias orthogonales esse prodituras.

43. Quae quo clariora reddantur, consideremus casum primum supra paragrapho 30 descriptum, in quo pro curvis brachystochronis invenimus hanc aequationem differentialem

$$dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} ;$$

ubi quidem variabilitas litterae A infinitas nostras brachystochronas producit; verum insuper haec conditio absolute necessaria adiungi debet, ut omnes istae curvae idem commune habeant initium in puncto A. Hoc ergo observato capiatur punctum M ita, ut formula integralis $\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$ datum obtineat valorem, puta C; ubi iterum probe tenendum est hoc integrale ita capi debere, ut in initio A evanescat; tum autem punctum M simul erit in traiectoria orthogonali.

44. Ut exemplo rem illustremus, sumamus $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, ut aequatio pro curvis secandis habeatur $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(x - a)}}$ seu integrando

$$2\sqrt{(ax - aa)} = y + \text{const.} ,$$

ubi constantem ita definire oportet, ut omnes curvae in eodem puncto A incipiant. Ponamus ergo pro hoc initio fieri $x = f$ et $y = g$, ita ut hae litterae neutiquam ab a pendeant. Quare, ut hoc eveniat, constans illa debet esse $2\sqrt{(af - aa)} - g$; sicque pro curvis secandis habetur haec aequatio:

$$2\sqrt{(ax - aa)} - 2\sqrt{(af - aa)} = y - g ;$$

ubi evidens est litteram a, etsi variabilem, ultra f augeri non posse. Tum autem pro traiectoriis capi debebit $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x - a)}} = C$, et integrando, ut supra est praescriptum, scilicet, ut integrale pro initio A evanescat:

$$2(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}x)\sqrt{(x - a)} - 2(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}f)\sqrt{(f - a)} ,$$

quod cuipiam quantitati datae, puta c, aequale positum dat:

$$(2a + x)\sqrt{(x - a)} - (2a + f)\sqrt{(f - a)} = \frac{3c}{2} .$$

Ex qua aequatione pro data curva AM, ad quam A refertur, definiatur abscissa x indeque porro applicata y ope aequationis superioris:

$$y = 2\left(\sqrt{(ax - aa)} - \sqrt{(af - aa)}\right) + g ,$$

ut innotescat punctum M. At si quis desideret aequationem pro traiectoria ista orthogonali inter easdem coordinatas x et y, is tantum ex binis aequationibus inventis quantitatem a eliminet, ut obtineat aequationem, in qua tantum occurrant litterae x, y cum constantibus f, g et c. Hac enim aequatione natura traiectoriae exprimetur.

45. Ex hoc exemplo perspicuum est, quomodo huiusmodi casus tractari oporteat, ubi integratio non succedit: semper enim integratio tamquam cognita est spectanda, etiamsi fuerit transcendens, quo pacto quasi novae litterae f et g ingrediuntur, quippe quae sunt coordinatae pro initio curvarum dato; deinde vero ipsa rei natura satis monstrat, quomodo reliquae operationes suscipi debeant.

46. Cum olim problema traiectoriarum orthogonalium tanto studio esset tractatum, casus, quem modo evolvimus, imprimis omni attentione dignus est visus, atque hoc modo erat vere enunciatus.

Si curvarum secundarum natura expressa fuerit tali aequatione differentiali:

$$dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}},$$

tum traiectoria determinari debet ex hac aequatione:

$$\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} = C.$$

Verum sequentes conditiones necessario subintelligi debent: ut primo omnes curvae secundae in communi quodam puncto incipiant, deinde ut posterius integrale in ipso illo initio evanescat.

ACCURATIOR EVOLUTIO PROBLEMATIS DE LINEA BREVISSIMA IN SUPERFICIE QUACUNQUE DUCENDA

Conventui exhibita die 25. Ianuarii 1779

Commentatio 727 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1799/1802), 1806, p. 44—54
Summarium ibidem p. 96—97

SUMMARIUM

L'auteur suppose donnée cette équation pour la surface

$$pdx + qdy + rdz = 0 ;$$

p, q, r étant des fonctions des coordonnées x, y, z, l'équation pour la plus courte ligne qu'on peut tracer sur cette surface sera:

$$ddx(qdz - rdy) + ddy(rdy - pdz) + ddz(pdy - qdx) = 0 .$$

Mais comme il ne se lui présente aucune voie qui puisse conduire à l'intégration de cette équation, quoiqu'il y ait plusieurs cas particuliers, où elle réussit, il se contente de développer quelquesuns de ces cas, ce qui lui fournit l'occasion de déployer la richesse de ses artifices analytiques. Mais c'est par là même que le mémoire se refuse à toutes les tentatives que nous pourrions faire d'en donner une idée à nos Lecteurs autrement qu'en le transcrivant presqu'en entier.

1. Pro superficie, in qua lineam brevissimam duci oportet, data sit inter ternas coordinatas orthogonales x, y, z haec aequatio differentialis: $dz = fdx + gdy$, ubi f et g sint functiones binarum x et y, ita ut sit

$$df = \alpha dx + \beta dy \quad \text{et} \quad dg = \beta dx + \gamma dy .$$

His positis, cum lineae cuiuscunque in hac superficie ductae elementum sit

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} ,$$

loco dz hoc valore posito erit elementum istius curvae

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2 + (fdx + gdy)^2} \; ;$$

unde si statuamus $dy = pdx$, hoc elementum erit $dx\sqrt{1 + pp + (f + gp)^2}$.

2. Formula igitur integralis, quam ad minimum revocari oportet, erit

$$\int dx \sqrt{1 + pp + (f + gp)^2} \; ,$$

quam in Tractatu meo: *Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes* in genere per $\int Z dx$ indicavi, ita ut pro hoc casu sit

$$Z = \sqrt{1 + pp + (f + gp)^2} \, .$$

Tum vero, posito $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, ostendi naturam Minimi vel Maximi hac aequatione exprimi: $Ndx = dP$, quam ergo patet ad differentialia secundi gradus assurgere.

3. Cum igitur sit $Z^2 = 1 + pp + (f + gp)^2$, differentietur haec formula, ac distinguantur triplicis generis elementa, scilicet dx, dy, dp, hocque modo reperietur:

$$ZdZ = dx(\alpha + \beta p)(f + gp) + dy(\beta + \gamma p)(f + gp) + dp\,(p + g(f + gp)) \, .$$

Cum igitur in genere posuerim $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, hoc casu habebimus:

$$M = \frac{(\alpha + \beta p)(f + gp)}{Z}$$

$$N = \frac{(\beta + \gamma p)(f + gp)}{Z}$$

$$P = \frac{p + g(f + gp)}{Z} \, .$$

Hinc ergo (ob $\beta dx + \gamma p dx = dg$) fiet

$$Ndx = \frac{dg(f + gp)}{Z} \, ,$$

unde aequatio pro curva nostra quaesita erit

$$\frac{dg(f + gp)}{Z} = d \cdot \frac{p + g(f + gp)}{Z} \, .$$

Pro qua aequatione evolvenda ponatur brevitatis gratia $p + g(f + gp) = S$, atque habebimus:

$$\frac{dg(f+gp)}{Z} = \frac{dS}{Z} - \frac{S\,dZ}{ZZ}$$

sive

$$dg(f+gp) = dS - \frac{S\,dZ}{Z} .$$

Quia igitur est $dS = dp + dg(f+gp) + g\,d(f+gp)$, erit nostra aequatio

$$0 = dp + g\,d(f+gp) - \frac{S\,dZ}{Z} .$$

Porro vero est:

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{p\,dp + (f+gp)\,d(f+gp)}{1+pp+(f+gp)^2} ,$$

quod multiplicari debet per $S = p + g(f+gp)$. Hinc multiplicando per denominatorem $1 + pp + (f+gp)^2$ habebimus:

$$0 = dp + (g - fp)\,d(f+gp) - gp\,dp(f+gp) + dp(f+gp)^2$$

seu

$$0 = dp + (g - fp)\,d(f+gp) + f\,dp(f+gp) ,$$

quae aequatio porro transmutatur in hanc formam:

$$0 = dp(1 + ff + gg) + (g - fp)(df + p\,dg) .$$

4. Quanquam haec aequatio satis est simplex, tamen non patet, quomodo eam ad differentialia primi gradus revocare liceat. Observavi autem sequenti substitutione negotium confici posse, scilicet: $v = \frac{g - fp}{f + gp}$; unde fit $p = \frac{g - fv}{gv + f}$, hinc iam differentiando deducitur

$$dp = \frac{-(ff+gg)\,dv + (1+vv)(f\,dg - g\,df)}{(f+gv)^2} .$$

Porro erit

$$g - fp = \frac{v(ff+gg)}{f+gv} ,$$

denique

$$df + p\,dg = \frac{f\,df + g\,dg + v(g\,df - f\,dg)}{f+gv} ,$$

quibus substitutis aequatio prodit:

$$0 = -dv(ff+gg)(1+ff+gg) + v(ff+gg)(f\,df + g\,dg) + (1+vv)(f\,dg - g\,df) + (ff+gg)(f\,dg - g\,df) .$$

5. Ad hanc aequationem simpliciorem reddendam statuamus $ff+gg=hh$, eritque $fdf+gdg=hdh$, deinde vero sit $\frac{g}{f}=k$, ut fiat $fdg-gdf=ffdk$, sicque aequatio nostra contrahetur in hanc formam:

$$0=-hhdv(1+hh)+h^3vdh+(1+hh+vv)ffdk\,.$$

Cum autem $g=fk$, erit $ff(1+kk)=hh$ ideoque $ff=\frac{hh}{1+kk}$, unde habebimus:

$$0=-dv(1+hh)+vhdh+(1+hh+vv)\frac{dk}{1+kk}\,,$$

quae aequatio porro ponendo $v=s\sqrt{1+hh}$ reducitur ad hanc formam:

$$0=-ds\sqrt{(1+hh)}+\frac{dk(1+ss)}{1+kk}\,.$$

Nunc igitur quantitatem s a reliquis separatam exhibere licet, cum sit

$$\frac{ds}{1+ss}=\frac{dk}{(1+kk)\sqrt{1+hh}}\,,$$

quae forma simplicissima esse videtur, ad quam in genere pertingere licet.

6. Quoniam autem hic binas variabiles y et x per eandem z determinare sumus conati, cum tamen omnes tres aequali ratione in calculum ingrediantur, universam hanc quaestionem ita tractare mihi est visum, ut omnes formulae pari ratione tres coordinatas x, y, z involvant, quo pacto speculationi potius consulatur quam usui, hancque ob rem investigationes sequentes subiungam.

SUPPLEMENTUM

7. Pro superficie data sit haec aequatio differentialis: $pdx+qdy+rdz=0$, ubi p, q, r sint functiones coordinatarum x, y, z; unde, ut aequatio sit possibilis, haec conditio inesse debet:

$$\frac{pdq-qdp}{dz}+\frac{qdr-rdq}{dx}+\frac{rdp-pdr}{dy}=0\,.$$

Hoc posito pro linea brevissima in hac superficie ducenda sequens habebitur aequatio, quam ternae coordinatae x, y, z pari ratione ingrediuntur:

$$ddx(qdz-rdy)+ddy(rdx-pdz)+ddz(pdy-qdx)=0\,.$$

Vel si brevitatis gratia ponamus:

$$\begin{aligned} dyddz - dzddy &= f \ , \\ dzddx - dxddz &= g \ , \\ dxddy - dyddx &= h \ , \end{aligned}$$

erit $fp + gq + hr = 0$, tum vero etiam $fdx + gdy + hdz = 0$. Deinde si elementum curvae brevissimae ponatur $= ds$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, tum vero quoque

$$\frac{dds}{ds} = \frac{qddz - rddy}{qdz - rdy} = \frac{rddx - pddz}{rdx - pdz} = \frac{pddy - qddx}{pdy - qdx} .$$

APPLICATIO AD SUPERFICIEM SPHAERICAM

8. Sit aequatio pro hac superficie $xdx + ydy + zdz = 0$, ita ut hic habeamus $p = x$, $q = y$, $r = z$, et prima aequatio pro linea brevissima erit sequens:

$$ddx(ydz - zdy) + ddy(zdx - xdz) + ddz(xdy - ydx) = 0 \ ,$$

cuius ergo integrale completum est $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, uti ex rei natura patet. Quaestio igitur huc redit, quomodo hoc integrale erui possit.

9. Cum iam altera aequatio sit $fx + g\gamma + hz = 0$, si pro hac aequatione ponamus $\Pi = \frac{zdx - xdz}{ydx - xdy}$, erit $d\Pi = d \cdot \frac{zdx - xdz}{ydx - xdy}$ ideoque

$$d\Pi = \frac{zddx - xddz}{ydx - xdy} - \frac{(zdx - xdz)(yddx - xddy)}{(ydx - xdy)^2} ,$$

sive evolvendo

$$d\Pi = \frac{x}{(ydx - xdy)^2}((dyddz - dzddy)x + (dzddx - dxddz)y + (dxddy - dyddx)z)$$

et introductis f, g, h erit

$$d\Pi = x\frac{(fx + gy + hz)}{(ydx - xdy)^2} .$$

Cum autem sit $fx + gy + hz = 0$, erit $d\Pi = 0$ ideoque Π quantitas constans, quam si statuamus $= A$, erit aequatio differentialis primi gradus $\Pi = \frac{zdx - xdz}{ydx - xdy}$ ita expressa:

$$A(ydx - xdy) = zdx - xdz \ ,$$

quae divisa per xx erit integrabilis; fiet enim

$$\frac{Ay}{x} = \frac{z}{x} + B \text{ sive } Ay - Bx - z = 0$$

vel mutatis constantibus

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 ,$$

quae aequatio cum sit pro plano quocunque per centrum sphaerae ducto, in superficie sphaerica nascentur circuli maximi; unde sequitur omnes circulos maximos esse lineas brevissimas omnium, quae in superficie sphaerae duci possunt.

10. Quoniam in huiusmodi calculis omnia ad unicam variabilem reduci solent, si pro hoc efficiendo ponamus $dy = tdx$ et $dz = udx$, sumto dx pro constante, erit prima aequatio, ut sequitur:

$$dt(r - pu) + du(pt - q) = 0 .$$

At aequatio pro superficie erit $p + qt + ru = 0$; unde, cum hinc fiat $p = -qt - ru$, prior aequatio hanc induet formam:

$$dt(r + qtu + ruu) - du(q + rtu + qtt) = 0 .$$

Porro erit

$$f = dx^2(tdu - udt) , \quad g = -dx^2 du , \quad h = dx^2 dt ,$$

tum vero $ds^2 = dx^2(1 + tt + uu)$ et denique

$$\frac{dds}{ds} = \frac{tdt + udu}{1 + tt + uu} = \frac{qdu - rdt}{qu - rt} = -\frac{pdu}{r - pu} = \frac{pdt}{pt - q} .$$

11. At si malimus quartam quandam variabilem, puta angulum φ introducere, ponendo $dx = td\varphi$, $dy = ud\varphi$, $dz = vd\varphi$ aequatio pro superficie erit

$$pt + qu + rv = 0 .$$

Porro pro litteris f, g, h habebimus

$$\begin{aligned} f &= d\varphi^2(udv - vdu) , \\ g &= d\varphi^2(vdt - tdv) , \\ h &= d\varphi^2(tdu - udt) , \end{aligned}$$

hinc ergo erit $ft + gu + hv = 0$. Aequatio pro linea brevissima erit:

$$fp + gq + hr = p(udv - vdu) + q(vdt - tdv) + r(tdu - udt) = 0 ,$$

denique fiet $ds^2 = d\varphi^2(tt + uu + vv)$ ideoque

$$\frac{dds}{ds} = \frac{tdt + udu + vdv}{tt + uu + vv} = \frac{qdv - rdu}{qv - ru} = \frac{rdt - pdv}{rt - pv} = \frac{pdu - qdt}{pu - qt} .$$

12. Cum nobis nulla via pateat aequationem generalem pro linea brevissima in superficie quacunque ducenda supra traditam integrandi, etiamsi plures dentur casus, quibus integratio aequationis pro curva succedit, operae pretium erit nonnullos eorum hic coronidis loco evolvisse.

13. Exordiamur a casu, quo una quantitatum p, q, r evanescit. Veluti si fuerit $r = 0$, aequatio pro superficie erit $pdx + qdy = 0$, quo ergo casu superficies fit cylindrica, cuius basis per aequationem $pdx + qdy$ determinatur. At posito in aequatione pro $\frac{dds}{ds}$ data $r = 0$, ea fiet $\frac{dds}{ds} = \frac{ddz}{dz}$, cuius integrale est $lds = ldz + l\alpha$ ideoque, sumtis numeris, $ds = \alpha dz$ sive

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha\alpha dz^2 \quad \text{seu} \quad dx^2 + dy^2 = dz^2(\alpha\alpha - 1) .$$

Hinc porro erit

$$z\sqrt{\alpha\alpha - 1} = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} ,$$

ubi $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ exprimit elementum curvae baseos; unde patet altitudinem cylindri z semper proportionalem esse arcui baseos.

14. Consideretur casus, quo $p = x$ et $q = y$, ubi ergo aequatio pro superficie erit:

$$xdx + ydx + rdz = 0 ,$$

quae continet omnia corpora rotunda seu tornata tornove effecta. Tum autem erit

$$\frac{dds}{ds} = \frac{xddy - yddx}{xdy - ydx} ,$$

cuius integrale est

$$lds = l(xdy - ydx) + la ,$$

ideoque erit sumtis numeris

$$\frac{ds}{a} = xdy - ydx \quad \text{ideoque} \quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{aa} = (xdy - ydx)^2$$

sive mutata constante

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,AA = (xdy - ydx)^2 .$$

Pro hac aequatione iterum integranda ponatur $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$, eritque

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + vvd\varphi^2 ;$$

tum vero pro curva erit $vdv + rdz = 0$, ubi r est functio quaedam ipsius v, ita ut $dz = -\frac{vdv}{r}$. Deinde vero erit

$$xdy - ydx = vvd\varphi ;$$

hisque omnibus substitutis aequatio nostra erit:

$$AA\left(dv^2 + vvd\varphi^2 + \frac{vvdv^2}{rr}\right) = AAds^2 = v^4 d\varphi^2 ,$$

ex qua porro colligitur

$$d\varphi^2 = \frac{AA\left(dv^2 + \frac{vvdv^2}{rr}\right)}{v^4 - vvAA} = \frac{AAdv^2(rr + vv)}{rrvv(vv - AA)}$$

ideoque

$$d\varphi = \frac{Adv}{rv}\sqrt{\frac{rr + vv}{vv - AA}} .$$

15. Pro aliis casibus aequatio generalis supra tradita magis ad usum accommodari potest. At primo quidem, quia res tantum pendet a ratione inter quantitates p, q, r, una earum pro lubitu assumi poterit. Sumatur ergo $r = -1$, ut fiat $dz = pdx + qdy$, sintque p et q functiones ipsarum x et y existente $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dz}\right)$. Ponatur porro $dy = \pi dx$, eritque $dz = (p + \pi q)dx$. Deinde, sumto elemento dx constante, ita ut sit $ddx = 0$, erit

$$ddy = d\pi dx \quad \text{et} \quad ddz = (dp + \pi dq + qd\pi)\,dx .$$

Hinc iam ternae illae litterae f, g, h sequenti modo exprimentur:

$$\begin{aligned} f &= dx^2(\pi dp - pd\pi + \pi\pi dq) , \\ g &= -dx^2(dp + \pi dq + qd\pi) , \\ h &= d\pi dx^2 , \end{aligned}$$

tum vero vidimus aequationem pro linea brevissima fore

$$pf + gq + hr = 0 ,$$

quae ergo hanc induit formam:

$$-d\pi(1 + pp + qq) + dp(\pi p - q) + \pi dq(\pi p - q) = 0$$

seu

$$d\pi(1 + pp + qq) + (dp + \pi dq)(q - \pi p) = 0 .$$

16. Quoniam in hac aequatione potissimum binae formulae $p + \pi q$ et $q - \pi p$ occurrunt, plurimum iuvabit rationem inter eas inducere. Statuatur hunc in finem $\frac{q - \pi p}{p + \pi q} = v$, unde iam fit $\pi = \frac{q - vp}{p + vq}$; tum vero vicissim

$$q - \pi p = \frac{v(pp + qq)}{p + vq},$$

porro autem erit

$$dp + \pi dq = \frac{pdp + qdq + v(qdp - pdq)}{p + qv}.$$

Si nunc ponatur $q = up$, erit

$$\pi = \frac{u - v}{1 + uv} \quad \text{hincque} \quad d\pi = \frac{du(1 + vv) - dv(1 + uu)}{(1 + uv)^2}.$$

Ponatur porro $pp + qq = tt$, et cum sit $q = up$, erit

$$pp = \frac{tt}{1 + uu} \quad \text{et} \quad d \cdot \frac{q}{p} = du = \frac{pdq - qdp}{pp},$$

hincque

$$pdq - qdp = ppdu = \frac{ttdu}{1 + uu},$$

quibus valoribus substitutis ob

$$q - \pi p = \frac{vtt}{p(1 + vu)} \quad \text{et} \quad dp + \pi dq = \frac{tdt - (vttdu) : (1 + uu)}{p(1 + uv)}$$

erit

$$0 = -\frac{(du(1 + vv) - dv(1 + uu))(1 + tt)}{(1 + uv)^2} - \frac{vtt(t(1 + uu)dt - vttdu)}{pp(1 + uu)(1 + uv)^2}$$

sive

$$(1 + tt)(du(1 + vv) - dv(1 + uu)) + vt((1 + uu)dt - vtdu) = 0,$$

quae aequatio porro reducitur ad hanc formam:

$$du((1 + vv)(1 + tt) - vvtt) - dv(1 + tt)(1 + uu) + vtdt(1 + uu) = 0$$

sive ad hanc concinniorem:

$$\frac{du}{1 + uu}(1 + vv + tt) - dv(1 + tt) + vtdt = 0.$$

Ponatur nunc $v = w\sqrt{1 + tt}$, eritque

$$dw = \frac{dv(1 + tt) - vtdt}{(1 + tt)^{\frac{3}{2}}}$$

seu erit

$$dv(1+tt) - vtdt = (1+tt)^{\frac{3}{2}}dw \ ;$$

tum vero erit

$$1 + tt + vv = (1+tt)(1+ww) \ ,$$

quibus substitutis aequatio nostra ita se habebit

$$\frac{du}{1+uu}(1+tt)(1+ww) - (1+tt)^{\frac{3}{2}}dw = 0 \ ,$$

hinc separando nanciscimur

$$\frac{du}{1+uu} = \frac{dw\sqrt{1+tt}}{1+ww} \ ,$$

consequenter

$$\frac{dw}{1+ww} = \frac{du}{(1+uu)\sqrt{1+tt}} \ ,$$

quae ergo aequatio semper integrari potest, quoties t fuerit functio ipsius u sive quoties $pp+qq$ fuerit functio ipsius $\frac{q}{p}$ sive q functio ipsius p.

17. Evenit autem, ut q sit functio ipsius p, primo si z et y ita determinentur per x et aliam novam variabilem ω, ut sit $y = Ax$ et $z = Bx$, existentibus A et B functionibus quibuscunque ipsius ω. Cum ergo posuerimus $dz = pdx + qdy$, erit

$$Bdx + xdB = pdx + qAdx + qxdA \ ,$$

ubi terminos differentiale dx involventes seorsim inter se comparari oportet, unde fit $p = B - Aq$; et comparatis seorsim terminis ipsam quantitatem x continentibus erit $q = \frac{dB}{dA}$ ideoque $p = \frac{BdA - AdB}{dA}$. Sicque p et q sunt functiones ipsius ω ideoque et $tt = pp + qq$ et $u = \frac{p}{q}$ erunt functiones eiusdem quantitatis ω et $\sqrt{1+tt}$ erit functio ipsius u. Quocirca aequatio supra inventa pro linea brevissima integrationem admittit. Hoc autem casu, quo scilicet $y = Ax$ et $z = Bx$, prodit superficies conica super basi quacunque constructa.

18. Aequatio supra tradita porro fit integrabilis statuendo $y = Ax + C$ et $z = Bx + D$; tum enim erit

$$dz = pdx + qdy = Bdx + xdB + dD$$

et quia $dy = Adx + xdA + dC$, erit etiam

$$dz = pdx + qdy = pdx + Aqdx + xqdA + qdC$$

ideoque, comparatis inter se membris ipsam quantitatem x continentibus, tum vero iis, quae differentiali dx affecta sunt, erit

$$B = p + Aq \quad \text{et} \quad dB = qdA\ ,$$

hinc

$$q = \frac{dB}{dA} \quad \text{et} \quad p = \frac{BdA - AdB}{dA}\ .$$

Praeterea vero esse debet $dD = qdC = \frac{dB\,dC}{dA}$, sive functiones A, B, C, D ita debent esse comparatae, ut $dA\,dD = dB\,dC$, quod si contigerit, erunt iterum p et q functiones eiusdem variabilis ω hincque erit etiam $\sqrt{1 + tt}$ functio ipsius u, quo ergo casu quoque lineam brevissimam definire licebit. Hic vero casus complecti videtur omnes plane superficies, quae in planum explicari possunt.

SOLUTIO PROBLEMATIS OB SINGULARIA CALCULI ARTIFICIA MEMORABILIS

Conventui exhibita die 22. Martii 1779

Commentatio 731 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 2 (1807/8), 1810, p. 3—9

1. Problema, quod hic solvendum suscipio, ita enunciatur: *Invenire lineam curvam AM* (Fig. 1), *in qua positis coordinatis* $CP = x$, $PM = y$, *arcu* $AM = s$ *et recta* $CM = \sqrt{xx + yy} = z$ *formula integralis* $\int v\,ds$ *maximum minimumve valorem obtineat, existente* v *functione quacunque ipsius* z.

2. Si in genere quaeratur relatio inter binas variabiles x et y positoque $dy = p\,dx$ fuerit V functio quaecunque ipsarum x, y et p, ita ut eius differentiale hanc habeat formam: $dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, tum formula integralis $\int V\,dx$ maximum minimumve habebit valorem, si fuerit $N\,dx = dP$, ita ut ista aequatio relationem quaesitam inter x et y exprimat.

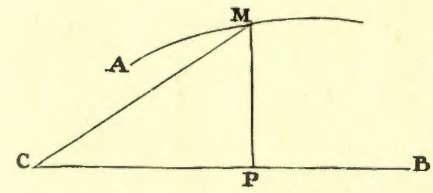


Fig. 1

3. Quanquam hac aequatione totum negotium conficitur, tamen plerumque iuvabit aliam insuper aequationem, etsi priori aequivalentem, considerasse. Cum enim sit $N\,dx = dP$, multiplicando per p fiet $N\,dy = p\,dP$, quo valore substituto prodibit

$$dV = M\,dx + P\,dp + p\,dP = M\,dx + d \cdot Pp \,.$$

Hinc igitur sequitur fore $M\,dx = d \cdot (V - Pp)$, quae est altera illa aequatio ad usum nostrum analyticum maxime accommodata.

4. Transferamus nunc haec praecepta generalia ad problema propositum. Ac primo quidem posito $dy = p\,dx$ habebimus $ds = dx\sqrt{1 + pp}$. Deinde, cum sit $z = \sqrt{xx + yy}$, erit $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{z}$. Tum vero, cum v

sit functio ipsius z, ponatur $dv = qdz$ eritque $dv = \frac{q(xdx + ydy)}{z}$. Nunc igitur pro formula maximi vel minimi habebimus $V = v\sqrt{1 + pp}$, unde differentiando colligitur

$$dV = \frac{q(xdx + ydy)\sqrt{1 + pp}}{z} + \frac{vpdp}{\sqrt{1 + pp}},$$

quo differentiali cum forma generali collato erit $M = \frac{qx\sqrt{1 + pp}}{z}$, $N = \frac{qy\sqrt{1 + pp}}{z}$ et $P = \frac{vp}{\sqrt{1 + pp}}$.

5. Hinc igitur aequatio totam nostri problematis solutionem complectens, quae erat $Ndx = dP$, induet hanc formam: $\frac{qydx\sqrt{1 + pp}}{z} = d \cdot \frac{vp}{\sqrt{1 + pp}}$. Altera autem aequatio in subsidium vocanda propter $V - Pp = \frac{v}{\sqrt{1 + pp}}$ ita exprimetur:

$$\frac{qxdx\sqrt{1 + pp}}{z} = d \cdot \frac{v}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Quare, cum pro priore aequatione sit

$$d \cdot \frac{vp}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{vdp}{\sqrt{1 + pp}} + p \cdot d \cdot \frac{v}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{vdp}{\sqrt{1 + pp}} + \frac{qxdy\sqrt{1 + pp}}{z},$$

perveniemus ad istam:

$$\frac{q(ydx - xdy)\sqrt{1 + pp}}{z} = \frac{vdp}{\sqrt{1 + pp}}$$

ideoque erit

$$ydx - xdy = \frac{vzdp}{q(1 + pp)},$$

haecque est aequatio, qua utemur ad solutionem problematis nostri concinnandam.

6. Dividamus hanc aequationem per $zz = xx + yy$, ut nanciscamur hanc formam:

$$\frac{ydx - xdy}{xx + yy} = \frac{vdp}{qz(1 + pp)},$$

ubi constat integrale prioris membri esse A tang $\frac{x}{y}$. Verum hinc parum lucri obtineri videtur, cum altera aequationis pars prorsus sit intractabilis. Interim

tamen ponamus esse φ illum angulum, cuius tangens est $\frac{x}{y}$, ita ut nostra aequatio sit $d\varphi = \frac{vdp}{qz(1+pp)}$.

7. Introducto hoc angulo φ ipsas coordinatas x et y ex calculo elidere poterimus. Cum enim sit $\frac{x}{y} = \text{tang } \varphi$, erit $x = z \sin \varphi$ et $y = z \cos \varphi$, quorum valorum ope etiam litteram p extrudi oportet. Quoniam vero $p = \frac{dy}{dx}$, erit

$$p = \frac{dz \cos \varphi - zd\varphi \sin \varphi}{dz \sin \varphi + zd\varphi \cos \varphi}.$$

Iam ponatur $dz = tzd\varphi$, ut fiat

$$p = \frac{t \cos \varphi - \sin \varphi}{t \sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{t - \text{tang } \varphi}{1 + t \text{ tang } \varphi},$$

quae expressio manifesto designat tangentem differentiae angulorum duorum, quorum prioris tangens $= t$, posterior vero angulus ipse $= \varphi$.

8. Cum igitur p aequetur tangenti cuiuspiam anguli, statuamus $p = \text{tang } \omega$, eritque ω ipsa illorum angulorum differentia, scilicet $\omega = A \text{ tang } t - \varphi$, unde fit $d\omega = \frac{dt}{1+tt} - d\varphi$. Praeterea vero ob $p = \text{tang } \omega$ ideoque $\omega = A \text{ tang } p$ erit etiam $d\omega = \frac{dp}{1+pp}$. Hinc aequatio nostra resolvenda erit $d\varphi = \frac{vd\omega}{qz}$. Ex praecedente autem forma foret $d\omega = \frac{dt}{1+tt} - d\varphi$ ideoque

$$\frac{qzd\varphi}{v} = \frac{dt}{1+tt} - d\varphi \quad \text{sive} \quad d\varphi\left(1 + \frac{qz}{v}\right) = \frac{dt}{1+tt}.$$

9. Quoniam autem posuimus $dz = tzd\varphi$, erit $d\varphi = \frac{dz}{tz}$, quo valore substituto nostra aequatio hanc induit formam:

$$\frac{dz}{z}\left(1 + \frac{qz}{v}\right) = \frac{tdt}{1+tt}.$$

Quare, cum sit $qdz = dv$, integratio commodissime per logarithmos instituetur; erit enim

$$lz + lv = l\sqrt{1+tt} - ln,$$

consequenter nacti sumus hanc aequationem integratam: $vz = \frac{\sqrt{1+tt}}{n}$.

10. Investigemus iam ex hac aequatione valorem ipsius t, qui erit $t = \sqrt{nnvvzz - 1}$. Quare, cum sit $t = \frac{dz}{zd\varphi}$, ex hac aequatione colligimus

$$d\varphi = \frac{dz}{z\sqrt{nnvvzz - 1}},$$

quae est aequatio differentialis primi gradus inter angulum φ et distantiam $CM = z$, siquidem v est functio ipsius z. Pro angulo vero notetur esse tang $\varphi = \frac{x}{y}$ hincque $x = z \sin \varphi$ et $y = z \cos \varphi$, ita ut iam ambae coordinatae x et y per eandem variabilem z exprimantur, quae est solutio absolutissima nostri problematis.

11. Hic autem fateri cogor me fortasse nunquam ad hanc solutionem perventum fuisse, nisi ea mihi iam aliunde innotuisset; atque ob hanc ipsam caussam artificia, quibus in hoc calculo sum usus, eo maiore attentione digna videntur, quod minime sint obvia et sine dubio maximum usum in pluribus aliis casibus praestare possint.

12. Subiungam igitur hic aliam eiusdem problematis solutionem, quae me sine ullis ambagibus ad ipsam aequationem finalem hic inventam manuduxit. Retuli scilicet totam quaestionem ad alias duas coordinatas, perinde ad curvam construendam accommodatas, quarum altera ipsa sit distantia CM (Fig. 2), quam hic vocabo $= x$, altera vero sit angulus BCM, littera y designandus. Hinc erit elementum curvae $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + xxdy^2}$, quod posito $dy = pdx$ abit in $ds = dx\sqrt{1 + ppxx}$, unde formula integralis pro maximo minimove erit $\int vdx\sqrt{1 + ppxx}$.

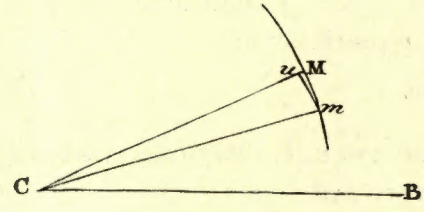


Fig. 2

13. Comparemus hanc formulam cum formula generali $\int V dx$ atque habebimus $V = v\sqrt{1 + ppxx}$, quae ergo quantitas, ob v functionem ipsius x, duas tantum quantitates variabiles involvit x et p, tertia y penitus exclusa; unde, cum posuerimus $dV = Mdx + Ndy + Pdp$, erit

$$N = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{vpxx}{\sqrt{1 + ppxx}}.$$

Hinc aequatio solutionem continens, $Ndx = dP$, abit in hanc: $dP = 0$,

unde fit $P = \text{const.} = \frac{1}{n}$, ita ut sit $nvpxx = \sqrt{1 + ppxx}$ hincque statim elicitur

$$p = \frac{1}{x\sqrt{nnvvxx - 1}} = \frac{dy}{dx},$$

sicque iam adepti sumus hanc aequationem:

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{nnvvxx - 1}}.$$

14. Transferamus nunc hanc solutionem simplicissimam ad denominationes in superiore solutione usurpatas, dum scilicet loco litterae x scribemus z et loco dy elementum $d\varphi$, hocque modo solutio nostri problematis hac continebitur aequatione:

$$d\varphi = \frac{dz}{z\sqrt{nnvvzz - 1}},$$

quae ob v functionem ipsius z perfecte congruit cum ea, ad quam in priore solutione per plures ambages sumus deducti. Ubi imprimis est observandum hanc solutionem semper valere, qualiscunque functio ipsius z pro v accipiatur. Imprimis autem hic memoratu dignum usu venit, quod, si pro v accipiatur potestas quaecunque ipsius z, curva satisfaciens adeo proditura sit algebraica.

15. Ponamus enim $v = z^\lambda$, atque habebimus hanc pro curva quaesita aequationem:

$$d\varphi = \frac{dz}{z\sqrt{(nnz^{2\lambda+2} - 1)}},$$

ad quam evolvendam statuamus $\sqrt{nnz^{2\lambda+2} - 1} = u$, ut fiat $d\varphi = \frac{dz}{zu}$, tum vero erit

$$nnz^{2\lambda+2} = uu + 1$$

sumtisque logarithmicis differentialibus

$$(2\lambda + 2)\frac{dz}{z} = \frac{2u\,du}{1 + uu}$$

ideoque

$$\frac{dz}{z} = \frac{u\,du}{(\lambda + 1)(1 + uu)},$$

ita ut iam habeamus $(\lambda + 1)d\varphi = \frac{du}{1 + uu}$ hincque integrando

$$(\lambda + 1)\varphi = A \text{ tang } u.$$

Quodsi ergo capiatur angulus ψ, cuius tangens sit $\sqrt{nnz^{2\lambda+2} - 1}$, erit $(\lambda + 1)\varphi = \psi$ ideoque $\varphi = \frac{\psi}{\lambda + 1}$; unde, dummodo λ fuerit numerus ra-

tionalis, ex angulo ψ semper algebraice determinari poterit angulus φ, consequenter, cum ex assumto angulo ψ sit $u = \text{tang } \psi = \sqrt{nnz^{2\lambda+2} - 1}$, omnia per istum angulum ψ determinari poterunt, quandoquidem habebimus

$$nnz^{2\lambda+2} = 1 + \text{tang } \psi^2 = \frac{1}{\cos \psi^2}$$

hincque $z = \sqrt[\lambda+1]{\frac{1}{n \cos \psi}}$; tum vero, cum sit $\varphi = \frac{\psi}{\lambda+1}$, erunt coordinatae $x = z \sin \frac{\psi}{\lambda+1}$ et $y = z \cos \frac{\psi}{\lambda+1}$; qui omnes valores ergo algebraice exhiberi possunt.

DE INSIGNI PARADOXO QUOD IN ANALYSI MAXIMORUM ET MINIMORUM OCCURRIT

Conventui exhibita die 31. Maii 1779

Commentatio 735 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 16—25

1. In Paradoxon, quod hic sum expositurus, incidi sequens problema resolvens:

Sub recta horizontali AB (Fig. 1) *describere curvam EY, cuius singula elementa Yy si in radicem quadratam distantiae YV ab illa recta multiplicentur, summa omnium horum productorum evadat minima.*

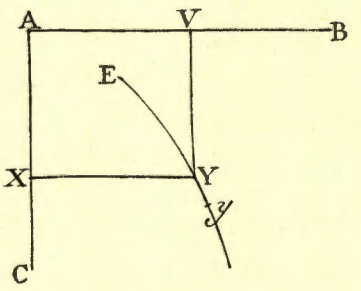


Fig. 1

Paradoxon autem in hoc consistit, quod pluribus casibus aliae lineae exhiberi possunt, pro quibus ista summa minor reperiatur, quam in curva per calculum inventa, etiamsi intra eosdem terminos contineantur. Praeterea vero etiam evenire potest, ut pro certis terminis propositis curva inventa evadat imaginaria, cum tamen pro aliis curvis intra eosdem terminos describendis summa illa memorata modo maior existere possit, modo minor; ita ut etiam his casibus aliquod minimum locum habere debere videatur. Haec igitur Paradoxa operae pretium videtur accuratius perpendere.

2. Hunc in finem repraesentet EY curvam huic problemati satisfacientem ad axem verticalem AC relatam, pro cuius puncto quovis Y ponatur abscissa $AX = x$ ipsi distantiae YV aequalis, applicata vero $XY = y$; unde posito $dy = pdx$ erit elementum curvae $Yy = dx\sqrt{1 + pp}$, sicque formula integralis, cuius valor omnium minimus esse debet, erit $\int dx \sqrt{x(1 + pp)}$.

3. Si haec ad motum referamus atque ponamus corpus curvam EY percurrens in singulis punctis Y celeritatem habere altitudini VY debitam, si

haec dicatur $= v$, cum sit v ut $\sqrt{x}$, curva quaeritur, cuius si singula elementa per hanc celeritatem v multiplicentur, summa omnium horum productorum prodeat minima. At vero olim observavi productum ex spatio percurso in celeritatem convenire cum idea minimae actionis ab illustri MAUPERTUIS olim stabilita; unde intelligitur curvam, quam quaerimus, ipsam esse *Proiectoriam*, quam corpus utcunque proiectum libere describit, ideoque fore *Parabolam*.

4. Cum igitur formula integralis ad minimum reducenda sit

$$\int dx \sqrt{x}(1 + pp) ,$$

si ea comparetur cum forma generali $\int V dx$, pro qua posui $dV = M dx + N dy + P dp$, demonstravi curvam quaesitam ista aequatione: $N dx = dP$ exprimi. Nostro igitur casu, quo $V = \sqrt{x(1 + pp)}$, erit

$$M = \frac{\sqrt{1 + pp}}{2\sqrt{x}}, \quad N = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1 + pp)}} .$$

Cum autem esse debeat $dP = 0$, ista quantitas P erit constans; unde haec deducitur aequatio:

$$\frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1 + pp)}} = \sqrt{a} ,$$

haecque est aequatio naturam curvae quaesitae exprimens.

5. Quaeratur (Fig. 1) iam ex hac aequatione valor ipsius $p = \sqrt{\frac{a}{x - a}}$, unde cum sit $p = \frac{dy}{dx}$ erit $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(x - a)}}$, cuius integratio praebet

$$y = 2\sqrt{ax - aa} + b .$$

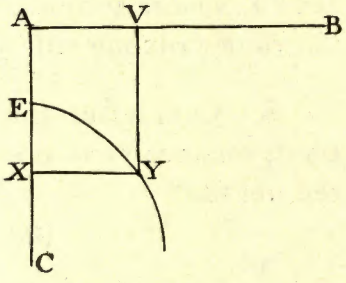


Fig. 2

Unde sumto $b = 0$ patet curvam EY fore parabolam circa axem AC descriptam, cuius vertex incidet in E, existente intervallo $AE = a$, quod simul distantiae foci parabolae a vertice aequatur, cuius ergo quadruplum erit parameter parabolae scilicet $4a$. Hinc igitur patet quaestioni nostrae satisfacere omnes parabolas, quarum axes sint verticales, verticum autem distantia a recta horizontali AB ipsi distantiae foci a vertice aequalis.

6. Omnes igitur istae parabolae EY hanc habent proprietatem, ut, si singula eius elementa Yy in radicem quadratam distantiae YV ducantur, summa omnium horum productorum sit minima; unde operae pretium erit

hunc valorem investigare. Quoniam autem supra invenimus $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$, erit $\sqrt{1+pp} = \sqrt{\frac{x}{x-a}}$ hincque elementum curvae $Yy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$, quod ergo multiplicatum per $\sqrt{x}$ praebet $\frac{xdx}{\sqrt{x-a}}$, cuius integrale revera debet esse minimum. At vero hoc integrale pro toto arcu EY reperitur $= \frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quae ergo quantitas minor esse deberet, quam si ulla alia curva intra terminos E et Y describeretur pro eaque valor eiusdem formulae integralis supputaretur.

7. Interim tamen facile innumeri casus exhiberi possunt, pro quibus iste valor rite computatus revera minor reperitur quam valor modo inventus. Quodsi enim loco curvae EY ex puncto E per rectas EA, AV, VY usque ad Y progrediamur, quae via utique multo maior est, quam si per curvam EY processissemus, valor nostrae formulae integralis pro spatio EA reperitur $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$; at pro spatio AV, ubi $x = 0$, valor evanescet; pro spatio vero VY habebitur $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, ita ut pro tota via $EAVY$ valor nostrae formulae futurus sit $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, qui quidem utique maior est quam expressio inventa $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quamdiu x non multo maior accipitur quam a; at vero contrarium evenit, si x multo maior accipiatur. Veluti, si sumto $a = 1$ statuatur $x = 100$, pro parabola formula nostra praebet $\frac{2}{3}\cdot 102\sqrt{99}$; at vero pro via $EAVY$, nostra formula erit $\frac{2}{3}\cdot 1001$; unde, cum proxime sit $\sqrt{99} = 10 - \frac{1}{21}$, ille valor proxime erit $\frac{2}{3}\cdot 1015$ ideoque revera maior quam alter.

8. Cum igitur minores valores pro x assumti cum indole minimi consentiant, maiores vero dissentiant, inquiramus in limitem, quo dissensus incipiat seu ubi fiat

$$(2a+x)\sqrt{x-a} = a\sqrt{a} + x\sqrt{x} ,$$

quod quo facilius fieri possit, sumamus $a = 1$ et $x = tt + 1$, ut habeatur aequatio

$$t(tt+3) = 1 + (tt+1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ideoque} \quad (1+tt)^{\frac{3}{2}} = t^3 + 3t - 1 ,$$

et sumtis quadratis erit:

$$t^6 + 3t^4 + 3tt + 1 = t^6 + 6t^4 - 2t^3 + 9tt - 6t + 1 \quad \text{sive} \quad 3t^3 - 2tt + 6t - 6 = 0 .$$

Ponatur $t = \frac{s}{3}$, ut prodeat haec aequatio:

$$s^3 - 2ss + 18s - 54 = 0 ,$$

hinc fit proxime $s = \frac{30}{11}$, ergo $t = \frac{10}{11}$, hincque $x = \frac{221}{121}$. Unde patet, ante quam x sumatur $= 2$, dissensum incipere.

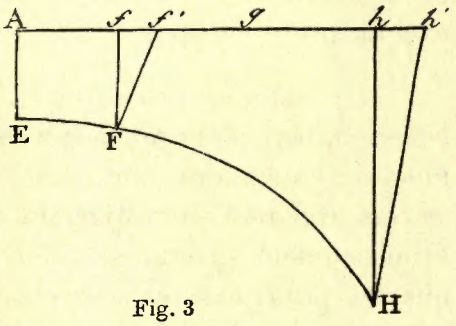


Fig. 3

9. Quo autem haec generalius evolvamus, curvam inventam (Fig. 3) ita instruamus, ut per data duo puncta F et H transeat, statuendo $Ff = f$, $Hh = h$, intervallum vero $fh = 2g$, ita ut bisecto hoc intervallo in g sit $fg = hg = g$. Quaeritur ergo tam positio axis parabolae quam eius vertex E. Hunc in finem sit ut supra $AE = a$ et distantia $Ag = v$, ita ut sit $Af = v - g$ et $Ah = v + g$. His positis, si in aequatione nostra inventa $y = 2\sqrt{ax - aa}$ sumamus vel $y = v - g$ vel $y = v + g$, esse debebit vel $x = f$ vel $x = h$, unde nanciscimur has duas aequationes:

$$v - g = 2\sqrt{af - aa} \quad \text{et} \quad v + g = 2\sqrt{ah - aa},$$

ex quibus valores tam pro v quam pro g elici debent. Eliminato vero v statim erit

$$g = -\sqrt{af - aa} + \sqrt{ah - aa} \quad \text{sive} \quad g + \sqrt{af - aa} = \sqrt{ah - aa};$$

unde sumtis quadratis fit

$$gg + 2g\sqrt{af - aa} + af - aa = ah - aa \quad \text{sive} \quad 2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg,$$

iterumque quadrando

$$4gg(af - aa) = aa(h - f)^2 - 2agg(h - f) + g^4$$

sive

$$aa((h - f)^2 + 4gg) - 2agg(h + f) + g^4 = 0.$$

Pro huius aequationis solutione ponamus $a = \frac{gg}{z}$, ut habeamus

$$0 = zz - 2(h + f)z + (h - f)^2 + 4gg,$$

und fit

$$z = (h + f) + 2\sqrt{hf - gg}$$

ideoque

$$a = \frac{gg}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}}.$$

10. Hinc iam statim patet, nisi fuerit $fh > gg$, curvam quaesitam esse imaginariam sive his casibus nullam curvam per puncta F et H traduci posse, cum tamen pro omnibus, quas pro lubitu per haec puncta ducere licet, valor

nostrae formulae integralis assignari queat, qui pro ratione curvae traductae modo maior modo minor evadere potest, ita ut hinc natura minimi neutiquam excludi posse videatur.

11. Quoties autem fuerit $fh > gg$, ob signum radicale ambiguum duae adeo exhiberi poterunt parabolae per puncta F et H transeuntes, cui utrique indoles minimi conveniet, cum tamen inter se plurimum discrepent. Quod quo clarius appareat, investigemus valorem illum, qui deberet esse minimus, ac primo quidem quaeramus valores formularum $\sqrt{af - aa}$ et $\sqrt{ah - aa}$, pro quarum priori utamur aequatione supra paragrapho 9 inventa:

$$2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg ,$$

quae ob $a = \frac{gg}{f + h + 2\sqrt{hf - gg}}$ praebet

$$\sqrt{af - aa} = -\frac{fg + g\sqrt{fh - gg}}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}} .$$

Hoc invento aequatio $\sqrt{ah - aa} = g + \sqrt{af - aa}$ praebet

$$\sqrt{ah - aa} = \frac{gh + g\sqrt{fh - gg}}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}}$$

sive scribendo brevitatis gratia $\sqrt{fh - gg}$ simpliciter $\sqrt{\ldots}$, ut sit $a = \frac{gg}{f + h + 2\sqrt{\ldots}}$, erit $\sqrt{af - aa} = -\frac{g(f + \sqrt{\ldots})}{f + h + 2\sqrt{\ldots}}$ et $\sqrt{ah - aa} = \frac{g(h + \sqrt{\ldots})}{f + h + 2\sqrt{\ldots}}$.

12. Designemus nunc valorem nostrae formulae integralis pro curva quacunque nomine eius momenti, et quia supra vidimus momentum curvae EY (Fig. 2) esse $\frac{2}{3}(2a + x)\sqrt{x - a}$, erit id etiam

$$\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a + x)\sqrt{ax - aa} ,$$

unde pro nostro casu momentum curvae EH (Fig. 3) erit

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}(2a + h)\sqrt{ah - aa}$$

et momentum pro curva EF

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}(2a + f)\sqrt{af - aa} ,$$

quod a praecedente subtractum relinquit momentum pro arcu proposito FH

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}} (2a(\sqrt{ah - aa} - \sqrt{af - aa}) + h\sqrt{ah - aa} - f\sqrt{af - aa}) ,$$

quae expressio, si loco radicalium scribantur valores modo inventi, induit hanc formam:

$$\frac{2g}{3(f + h + 2\sqrt{\ldots})\sqrt{a}} (2a(f + h + 2\sqrt{\ldots}) + ff + hh + (f + h)\sqrt{\ldots}) ,$$

quae, si loco a eius valor substituatur, abit in hanc

$$\frac{2g}{3(f + h + 2\sqrt{\ldots})\sqrt{a}} (2gg + ff + hh + (f + h)\sqrt{\ldots})$$

sive in hanc: $$\frac{2g}{3\sqrt{a}} \left(\frac{2gg + ff + hh + (f + h)\sqrt{\ldots}}{f + h + 2\sqrt{\ldots}} \right) .$$

Quodsi haec posterior fractio multiplicetur supra et infra per $f + h - 2\sqrt{\ldots}$, prodibit eius numerator

$$= (f+h)(2gg+ff+hh) - 2(f+h)(fh - gg) + (2fh - ff - hh - 4gg)\sqrt{\ldots} ,$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$(f+h)(4gg + (h-f)^2) - (4gg + (h-f)^2)\sqrt{\ldots} = (4gg + (h-f)^2)(f+h-\sqrt{\ldots}).$$

At vero denominator prodibit $(h - f)^2 + 4gg$ sicque commode evenit, ut evadat momentum quaesitum $= \frac{2g}{3\sqrt{a}} (f + h - \sqrt{\ldots})$. Quare cum

$$\sqrt{a} = \frac{g}{\sqrt{(f + h + 2\sqrt{\ldots})}},$$

erit hoc momentum pro arcu FH

$$= \tfrac{2}{3} (f + h - \sqrt{\ldots}) \sqrt{f + h + 2\sqrt{\ldots}} .$$

13. Quoties ergo fuerit $gg < fh$, ob signum radicale semper duo exhiberi poterunt minima, sive ab F ad H binos arcus parabolicos ducere licebit. Quin etiam, si haec ad motum proiectionis referantur, ex puncto F duplici modo corpus cum celeritate altitudini Ff debita ita proiici poterit, ut punctum H feriat. Ex quo facile intelligitur hoc fieri non posse, nisi punctum H ultra certam distantiam fuerit remotum, quo ergo casu mirum non est curvam nostram fieri imaginariam, idque continget, quoties fuerit $gg > fh$.

14. Contemplemur autem attentius casum, quo $gg = fh$, siquidem tum binae solutiones in unam coalescunt ob $\sqrt{fh - gg} = 0$; tum vero arcus parabolicus FH iactum longissimum repraesentabit. Hoc igitur casu momentum istius arcus FH erit $\frac{2}{3}(f+h)^{\frac{3}{2}}$. Sin autem hic per viam $FfhH$ ad H usque progrediamur, erit momentum huic viae respondens $= \frac{2}{3}(f\sqrt{f} + h\sqrt{h})$, quod manifesto semper minus est quam illud, quod pro arcu parabolico FH invenimus, etiamsi hoc in suo genere sit minimum.

15. Ad haec paradoxa explicanda notari oportet momentum viae $FfhH$ respondens etiam in suo genere esse minimum. Scilicet, si puncta f et h aliquantum mutentur, momentum, quod respondet viae $Ff'h'H$, manifesto foret maius. Mirum igitur videbitur verum hoc minimum non a calculo fuisse nobis monstratum; verum ratio satis est manifesta, propterea quod haec via non est linea continua. Interim tamen etiam hic casus in calculo ipso comprehenditur. Cum enim esse debeat $d \cdot \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}} = 0$, evidens est hanc formulam tam pro rectis Ff quam pro hH, utpote verticalibus, esse revera $= 0$; at vero pro via horizontali fh propter $x = 0$ iterum evanescit. Ceterum satis notum est eandem lineam curvam saepenumero plures applicatas minimas inter se maxime diversas contineri posse, dummodo quaelibet applicata minor sit quam sibi proximae utrinque. Hincque etiam intelligitur, quando calculus inter puncta F et H duas exhibet curvas, momenta pro utraque minima esse posse, etiamsi a se invicem plurimum differant.

DE LINEIS CURVIS NON IN EODEM PLANO SITIS, QUAE MAXIMI VEL MINIMI PROPRIETATE SUNT PRAEDITAE

Commentatio 740 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 18—42
Conventui exhibita die 8. Martii 1779

1. Quae hactenus de lineis curvis Maximi Minimive proprietate quapiam gaudentibus sunt tradita, tantum ad eiusmodi lineas curvas spectant, quae in eodem plano describi possunt, cuius ratio in eo est posita, quod formula integralis Maximum Minimumve involvens duas tantum complectitur quantitates variabiles, quas inter eam relationem investigari oportet, qua valor istius formulae maximus vel minimus evadat, quae si ad lineas curvas transferantur, eae ita comparatae esse debent, ut earum natura per aequationem inter duas coordinatas exprimatur; unde evidens est hanc conditionem non nisi in lineas super eodem plano descriptas competere posse.

2. Sin autem formula integralis tres variabiles veluti x, y et z involvat, quoniam ea determinatum valorem recipere nequit, nisi binae per tertiam determinentur, ita ut tam y quam z tanquam functiones ipsius x sint spectandae, ad Maximum Minimumve definiendum necesse est, ut tam inter x et y quam inter x et z conveniens relatio exploretur; unde si illae tres variabiles x, y et z tanquam coordinatae spectentur, curva inde oritur non in eodem plano sita, cuius determinatio utique binas aequationes postulat, quarum altera relationem inter x et y altera vero inter x et z exprimat.

3. Quae quo clarius ob oculos ponantur, concipiamus (Fig. 1) ternos axos inter se normales OA, OB et OC, quorum bini priores in planum tabulae incidant, tertius vero OC ei normaliter insistat. Quodsi iam z fuerit punctum quodcunque curvae quaesitae, eius locum per ternas coordinatas illis axibus parallelas assignare solemus, quae sint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quare ad hunc locum cognoscendum pro qualibet abscissa $OX = x$ necesse

est, ut tam applicata $XY = y$ quam altera $YZ = z$ exhiberi queant, ad quod ergo duplici relatione opus est, sive duae aequationes ad hoc requiruntur, ex quibus tam y quam z per tertiam x definiri queat; ubi per se perspicuum est aequatione inter x et y naturam proiectionis curvae quaesitae in plano AOB factam exprimi, altera vero aequatione inter x et z, ducta recta XV parallela et aequali ipsi YZ, proiectionem eiusdem curvae in plano AOC factam exhiberi. Simili modo, si inde aequatio inter y et z eliciatur, ea natura proiectionis in planum BOC facta determinabitur. Sufficit autem ad curvam determinandam duas tantum proiectiones priores nosse, quandoquidem his tertia proiectio iam determinatur.

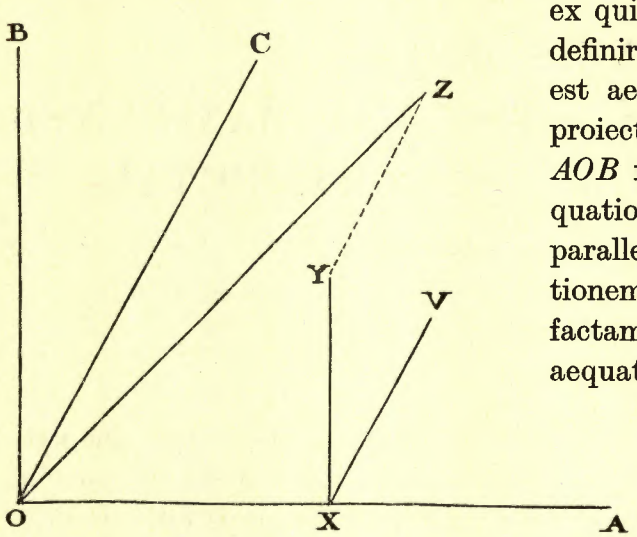


Fig. 1

4. Quodsi iam eiusmodi curva desideretur, in qua formula integralis $\int V dx$ maximum minimumve obtineat valorem, ubi V sit functio quaecunque non solum ipsarum trium variabilium x, y et z, sed etiam earum differentialia cuiuscunque ordinis involvat ac fortasse etiam novas formulas integrales complectatur: ad hoc expediendum duae aequationes sunt necessariae, ex quibus tam valorem ipsius y quam ipsius z per x definire liceat; quod si praestari poterit, simul ambae proiectiones curvae quaesitae modo memoratae innotescent.

5. Quo igitur in hoc negotio simili modo versemur, quo olim sum usus circa formulas duas tantum variabiles complectentes, statuamus primo pro variabili y eiusque differentialibus $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ etc. Similique modo pro differentialibus ipsius z ponamus $dz = p'dx$, $dp' = q'dx$, $dq' = r'dx$ etc., at vero a formulis integralibus, quae forte insuper in quantitate V inesse possent, mentem abstrahamus, ita ut iam quantitas V spectari possit tanquam functio omnium harum quantitatum: x, y, z, p, p', q, q', r, r' etc., unde differentiatione more solito instituta habebitur talis forma

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$
$$+ N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{etc.}$$

6. Hac forma in genere constituta totum negotium huc redit, ut inde binae aequationes eliciantur ex literis M, N, N', P, P', Q, Q' etc. formandae, ex quibus deinceps natura curvae quaesitae per binas proiectiones memoratas definiri queat. Hic autem ante omnia meminisse oportet casibus, quibus tertia variabilis z prorsus deest, quos olim uberrime sum prosecutus, naturam curvarum satisfacientium semper hac aequatione exprimi:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0 .$$

Unde manifestum est, si variabilis y abesset et formula integralis $\int V dx$ tantum variabiles x et z involveret, aequationem pro curva quaesita futuram esse:

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0 .$$

7. Quoniam autem praesenti casu duplex relatio est investiganda, quarum altera inter x et y, altera vero inter x et z subsistat, tota quaestio ad casum praecedentem revocari poterit. Primo enim alteram curvae quaesitae proiectionem inter x et z tanquam datam spectare licebit, quasi iam revera eius natura esset cognita, ita ut tantum altera relatio inter x et y sit investiganda, id quod iam per methodum ordinariam facile expediri poterit. Cum enim nunc z tanquam certa functio ipsius x spectari possit, etiam quantitates inde derivatae tanquam tales functiones spectari poterunt, unde in valore differentiali pro dV assumto omnes hi termini:

$$N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{etc.}$$

iam in membro Mdx contineri erunt censendi; quare, cum littera M in aequationem finalem non ingrediatur, aequatio inter x et y hac exprimetur aequatione:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0 .$$

8. Quodsi iam simili modo valorem ipsius y, quasi iam esset cognitus, contemplemur, ita ut tam y quam p, q, r tanquam functiones cognitae ipsius x spectari queant, hi termini: $Ndy + Pdp + Qdq + Rdr$ ad formam Mdx accedere erunt censendi sicque aequatio inter z et x per hanc aequationem definietur:

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0 .$$

9. Ex his coniunctis manifesto sequitur, si neutra harum aequationum tanquam cognita spectari queat, sed utraque definiri debeat, quaesito satisfieri his binis aequationibus coniungendis:

$$\text{I.}\quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0\ ,$$

$$\text{II.}\quad N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} = 0\ ,$$

haecque solutio adeo patet, ad quotcunque gradus differentialia in formula V contenta ascendant.

10. Cum autem solutiones talium problematum altiora differentialia implicantium plerumque nimis evadant difficiles atque adeo plerumque plane intractabiles, hic tantum casus simpliciores, quibus differentialia in formula V non ultra primum gradum ascendant, attentius sumus contemplaturi, quae ergo ex his duabus aequationibus erunt petendae:

$$\text{I.}\quad N\,dx = dP \quad \text{et} \quad \text{II.}\quad N'\,dx = dP'\ .$$

11. Quamquam autem hae duae aequationes totum negotium conficere sunt censendae, tamen plerumque plurimum expediet iis adhuc tertiam quandam aequationem, quae quidem in iis iam contineatur, adiungere, quippe quae calculo sublevando plurimum inserviet. Quoniam enim posuimus $dy = p\,dx$ et $dz = p'\,dx$, ex illis duabus aequationibus elicimus:

$$1°.\quad N\,dy = p\,dP \quad \text{et} \quad 2°.\quad N'\,dz = p'\,dP'\ ,$$

qui valores, in formula differentiali generali:

$$dV = M\,dx + N\,dy + N'\,dz + P\,dp + P'\,dp'$$

substituti, producent hanc formam:

$$dV = M\,dx + p\,dP + P\,dp + p'\,dP' + P'\,dp'\ ,$$

sive

$$dV = M\,dx + d(p\,P + p'\,P')\ .$$

Hinc ergo, si brevitatis gratia ponamus $V - Pp - P'p' = S$, orietur ista aequatio: $M\,dx = dS$, quae ergo cum binis praecedentibus $N\,dx = dP$ et $N'\,dx = dP'$ commode coniungi poterit. Interim tamen probe est observandum, quamlibet harum trium aequationum iam in binis reliquis esse contentam ideoque omitti posse, nisi insignem usum in calculo evolvendo saepissime praestaret. His notatis istud argumentum prorsus novum aliquot exemplis illustremus.

PROBLEMA 1

Investigare lineam curvam ternis coordinatis x, y et z contentam, in qua haec formula integralis: $\int \frac{xdydz}{dx}$ *maximum minimumve obtineat valorem.*

SOLUTIO

12. Cum igitur sit $dy = pdx$ et $dz = p'dx$, cuius loco commoditatis gratia scribamus $dz = qdx$, quandoquidem haec littera q in primo significatu hic non amplius occurrit, formula nostra integralis erit $\int pqxdx$, ita ut sit $V = pqx$ hincque differentiando

$$dV = pqdx + qxdp + pxdq ,$$

unde facta collatione habebimus

$$M = pq , \quad N = 0 , \quad N' = 0 , \quad P = qx \quad \text{et} \quad P' = px ,$$

hincque fiet $S = -pqx$, quamobrem tres nostrae aequationes erunt:

$$1°. \; pqdx = -d \cdot pqx , \quad 2°. \; 0 = d \cdot qx \quad \text{et} \quad 3°. \; 0 = d \cdot px .$$

13. Ex binis posterioribus aequationibus fit $qx = a$ et $px = b$, unde tota quaestio iam sponte resolvitur. Cum enim inde sit $\frac{q}{p} = \frac{a}{b} = n$, erit $q = np$, et iam reliqua omnia per variabilem p facile definiri poterunt existente $n = \frac{a}{b}$. Cum enim sit $x = \frac{b}{p}$, erit $dx = -\frac{bdp}{pp}$ hincque

$$pdx = dy = -\frac{bdp}{p} \quad \text{et} \quad qdx = dz = -\frac{nbdp}{p} ,$$

unde fit integrando

$$y = f - blp \quad \text{et} \quad z = g - nblp .$$

Quocirca cum sit $p = \frac{b}{x}$, nunc variabilis y sequenti modo exprimetur: $y = f - blb + blx$ sive mutatis constantibus: $y = f + blx$, tum vero $z = g + nblx$.

14. Hinc igitur patet utramque curvae quaesitae proiectionem esse curvam logarithmicam; ubi observasse iuvabit in his determinationibus inesse quatuor constantes arbitrarias f, g, n et b, quemadmodum solutio completa postulat, siquidem utraque aequatio principalis manifesto differentialia se-

cunda complectitur ideoque necesse est, ut utrumque integrale completum duas constantes arbitrarias contineat.

15. Cum deinde relatio inter y et z ita exprimatur: $z = ny + c$, proiectio curvae inventae super plano BOC erit linea recta; unde patet totam curvam nostram in idem planum incidere neque adeo proprie ad praesentem casum referri posse. Interim tamen etiam hinc nostra methodus haud mediocriter illustratur, cum declaret, quando curva inventa in eodem plano describi possit.

PROBLEMA 2

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y et z contentam, in qua haec formula integralis:

$$\int \frac{(y+z)dydz}{dx}$$

maximum minimumve obtineat valorem.

SOLUTIO

16. Posito hic $dy = pdx$ et $dz = p'dx = qdx$ erit $V = pq(y+z)$, hincque differentiando:

$$dV = pqdy + pqdz + (y+z)qdp + (y+z)pdq\ .$$

Unde facta comparatione cum formula generali

$$dV = Mdx + Ndy + N'dz + Pdp + P'dp'$$

habebimus $M = 0$, $N = pq$, $N' = pq$, $P = (y+z)q$ et $P' = (y+z)p$; hinc ergo fiet $S = V - Pp - P'q = -pq(y+z)$. Ex his iam tres nostrae aequationes erunt:

$$\begin{aligned} 1^\circ.&\quad 0 = -d \cdot pq \cdot (y+z)\ , \\ 2^\circ.&\quad pqdx = d \cdot (y+z)\, q \\ 3^\circ.&\quad pqdx = d \cdot (y+z)\, p\ . \end{aligned}$$

Prima statim praebet $pq(y+z) = a$, ita ut sit $y + z = \frac{a}{pq}$, qui valor in reliquis substitutus dat:

$$1^\circ.\quad pqdx = d \cdot \frac{a}{p} = -\frac{adp}{pp}\ ,\quad 2^\circ.\quad pqdx = d \cdot \frac{a}{q} = -\frac{adq}{qq}\ .$$

Hinc sequitur fore $\frac{dp}{pp} = \frac{dq}{qq}$; consequenter $-\frac{1}{p} = -\frac{1}{q} - b$ sive $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + b$,

unde elicimus $q = \frac{cp}{c+p}$. Sicque prima aequatio fit $y + z = \frac{a(c+p)}{cpp}$; reliquae vero dant

$$pqdx = -\frac{adp}{pp} \quad \text{ideoque} \quad dx = -\frac{a(c+p)dp}{cp^4},$$

cuius integrale praebet

$$x = \frac{a}{3p^3} + \frac{a}{2cpp} + f.$$

17. Deinde ob $dy = pdx$ erit nunc $dy = -\frac{a(c+p)dp}{cp^3}$, cuius integrale praebet

$$y = \frac{a}{2pp} + \frac{a}{cp} + g.$$

Pro tertia coordinata z, quoniam iam vidimus esse $y + z = \frac{a(c+p)}{cpp}$, erit nunc

$$z = \frac{a - 2gpp}{2pp} = \frac{a}{2pp} - g.$$

Hic igitur iterum introductae sunt quatuor constantes arbitrariae; unde intelligitur hanc solutionem esse completam.

18. Hic quidem omnes tres coordinatas x, y et z per eandem variabilem p expressas dedimus, id quod pro constructione curvae eundem praestat usum, quoniam pro singulis valoribus loco p assumtis totidem curvae puncta designantur; unde haud difficulter intelligitur totam hanc curvam non in eodem plano esse sitam, propterea quod ex his tribus formulis elidendo p nulla talis aequatio: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ formari potest. Litteram autem p sequenti modo eliminare licebit. Cum sit $y - z = \frac{a}{cp} + 2g$, erit

$$p = \frac{a}{c(y - z - 2g)},$$

qui valor in prima aequatione substitutus producet aequationem inter x, y et z, cui adiungi poterit ea, quae oritur ex tertia $z + g = \frac{a}{2pp}$, unde fit:

$$2a(z + g) = cc(y - z - 2g)^2.$$

Verum hae formulae nihil plane conferunt ad curvam describendam. Caeterum evidens est hanc curvam esse algebraicam, secus atque ea, quae problemate praecedente erat inventa.

PROBLEMA 3

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y et z contentam, in qua haec formula integralis:

$$\int X \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

maximum minimumve adipiscatur valorem, existente X functione quacunque ipsius x.

SOLUTIO

19. Hic ergo ob $dy = pdx$ et $dz = qdx$ erit

$$V = X\sqrt{1 + pp + qq},$$

ubi brevitatis gratia ponamus $\sqrt{1 + pp + qq} = s$, ita ut sit $V = Xs$. Quia igitur ipsae litterae y et z non insunt, erit tam $N = 0$ quam $N' = 0$; deinde ob $ds = \frac{pdp + qdq}{s}$ erit $P = \frac{Xp}{s}$ et $P' = \frac{Xq}{s}$, unde binae aequationes solutionem continentes erunt $dP = 0$ et $dP' = 0$, sicque habebimus $\frac{Xp}{s} = a$ et $\frac{Xq}{s} = b = na$.

20. Hinc igitur statim patet fore $\frac{q}{p} = n$ sive $q = np$, hincque porro $dz = ndy$ et integrando $z = ny + c$, ita ut proiectio in planum BOC facta sit linea recta ideoque tota curva quaesita in certo plano existat. Deinde vero, cum sit $s = \sqrt{1 + (nn + 1)pp}$, erit

$$Xp = a\sqrt{1 + (nn + 1)pp};$$

unde posito brevitatis gratia $nn + 1 = m$ colligimus $p = \frac{a}{\sqrt{(X^2 - aamm)}}$. Sicque pro utraque proiectione quaesita habebimus has aequationes differentiales:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(X^2 - mmaa)}} \quad \text{et} \quad dz = \frac{nadx}{\sqrt{(X^2 - mmaa)}}.$$

21. Hic observasse iuvabit, cum $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ exprimat elementum curvae, casu $X = x$ curvam inventam fore *Catenariam*, siquidem eius centrum gravitatis infimum occupat locum inter omnes alias curvas isoperimetricas; at vero, si fuerit $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita ut

$$dy = \frac{adx\sqrt{x}}{\sqrt{(1 - mmaax)}} \quad \text{et} \quad dz = \frac{nadx\sqrt{x}}{\sqrt{(1 - mmaax)}},$$

manifestum est curvam inventam esse *Brachystochronam*.

PROBLEMA 4

Invenire lineam curvam per ternas coordinatas x, y et z determinandam, in qua haec formula integralis:

$$\int V(xx + yy + zz)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

maximum minimumve adipiscatur valorem.

SOLUTIO

22. Ponamus brevitatis gratia $V(xx + yy + zz) = v$ et $V(1 + pp + qq) = s$, ita ut nostra formula integralis evadat $\int V dx$, existente $V = vs$ ideoque $dV = sdv + vds$; at vero erit

$$dv = \frac{xdx + ydy + zdz}{v} \quad \text{et} \quad ds = \frac{pdp + qdq}{s},$$

unde sequitur fore

$$M = \frac{sx}{v}, \quad N = \frac{sy}{v}, \quad N' = \frac{sz}{v}, \quad P = \frac{vp}{s}, \quad P' = \frac{vq}{s}.$$

23. Hinc igitur, cum fiat:

$$S = V - Pp - P'q = \frac{v(ss - pp - qq)}{s} = \frac{v}{s},$$

ternae aequationes nostrae erunt:

$$\text{I.} \quad \frac{sxdx}{v} = d \cdot \frac{v}{s}, \quad \text{II.} \quad \frac{sydx}{v} = d \cdot \frac{vp}{s} \quad \text{et} \quad \text{III.} \quad \frac{szdx}{v} = d \cdot \frac{vq}{s}.$$

Ex quibus solutionem nostri problematis elici oportet, id quod plurimam solertiam atque insignia calculi artificia postulat.

24. Cum sit

$$d \cdot \frac{pv}{s} = \frac{vdp}{s} + p \cdot d \cdot \frac{v}{s} \quad \text{et} \quad d \cdot \frac{qv}{s} = \frac{vdq}{s} + q \cdot d \cdot \frac{v}{s},$$

ob $d \cdot \frac{v}{s} = \frac{sxdx}{v}$ facta hac substitutione solutio perducetur ad has duas aequationes:

$$\text{I.} \quad (ydx - xdy) = \frac{vvdp}{ss},$$

$$\text{II.} \quad (zdx - xdz) = \frac{vvdq}{ss},$$

quamobrem videamus, quibusnam artificiis hinc formulas integrabiles elicere queamus, quandoquidem hae aequationes manifesto sunt differentiales secundi gradus ob $p = \frac{dy}{dx}$ et $q = \frac{dz}{dx}$.

25. Harum aequationum altera per alteram divisa praebet

$$\frac{ydx - xdy}{zdx - xdz} = \frac{dp}{dq},$$

unde nascitur haec aequatio:

$$\frac{dp}{ydx - xdy} = \frac{dq}{zdx - xdz} \text{ sive } \frac{dp}{y - px} = \frac{dq}{z - qz}.$$

Quodsi iam haec aequatio ita referatur:

$$-\frac{xdp}{y - px} = -\frac{xdq}{z - qx},$$

facile patet in utraque fractione numeratorem esse ipsum differentiale denominatoris ideoque fore:

$$l(y - px) = l(z - qx) - ln,$$

unde habebimus $z - qx = n(y - px)$, ita ut hinc iam determinetur z per reliquas litteras.

26. Substituatur nunc iste valor loco $z - qx$ in nostra aequatione differentiali prodibitque $dq = ndp$, consequenter $q = np + a$, hincque porro integrando fit $z = ny + ax + b$, quae aequatio, cum unicam habeat dimensionem, indicat totam curvam, quam quaerimus, in certo quodam plano existere.

27. Hic autem probe notandum est in postrema aequatione inventa constantem additam b per praecedentia iam determinari. Cum enim inveneri-mus $z - qx = ny - npx$, ob $q = np + a$ erit $z = ny + ax$. Nunc igitur habemus

$$v = \sqrt{(xx + yy + (ny + ax)^2)} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{(1 + pp + (np + a)^2)},$$

ita ut iam quaestio perducta sit ad binas tantum variabiles x et y, propter $p = \frac{dy}{dx}$, quarum relatio petenda est ex altera aequationum principalium:

$$ydx - xdy = \frac{vvdp}{ss},$$

quae substitutis pro v et s valoribus transformatur in hanc:

$$\frac{ydx - xdy}{xx + yy + (ny + ax)^2} = \frac{dp}{1 + pp + (np + a)^2},$$

cuius prius membrum posito $y = ux$ induit hanc formam:

$$-\frac{du}{1 + uu + (nu + a)^2} = \frac{dp}{1 + pp + (np + a)^2},$$

ita ut adepti simus aequationem differentialem separatam, cuius adeo bina membra perfecte sunt similia, ita ut alterutrum tantum integrasse sufficiat.

28. Incipiamus igitur a membro posteriori, quod evolutum fit

$$\frac{dp}{1 + aa + 2anp + (nn + 1)pp}$$

et quod ita referamus:

$$\frac{1}{1 + nn} \cdot \frac{dp}{pp + 2\alpha p + \beta},$$

ut sit

$$\alpha = \frac{an}{1 + nn} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + aa}{1 + nn},$$

pro quo ponamus $p + \alpha = t$ sive $p = t - \alpha$, hincque istud membrum evadet

$$\frac{1}{1 + nn} \cdot \frac{dt}{tt - \alpha\alpha + \beta},$$

cuius integrale erit:

$$\frac{1}{(1 + nn)\sqrt{\beta - \alpha\alpha}} \cdot \text{Arc tg} \frac{t}{\sqrt{\beta - \alpha\alpha}}$$

sive

$$\frac{1}{(1 + nn)\sqrt{\beta - \alpha\alpha}} \text{Arc tg} \frac{p + \alpha}{\sqrt{\beta - \alpha\alpha}}.$$

Eodemque modo, loco p scribendo u, prioris membri integrale est

$$-\frac{1}{(1 + nn)\sqrt{\beta - \alpha\alpha}} \text{Arc tg} \frac{u + \alpha}{\sqrt{\beta - \alpha\alpha}}.$$

29. Hinc igitur integrale postremae nostrae aequationis ob coefficientes communes erit:

$$C - \text{Arc tg} \frac{u + \alpha}{\sqrt{\beta - \alpha\alpha}} = \text{Arc tg} \frac{p + \alpha}{\sqrt{\beta - \alpha\alpha}},$$

sive summa horum duorum arcuum aequatur quantitati constanti; consequenter etiam tangens summae horum duorum arcuum debet esse constans, quae est:

$$\frac{(p+u+2\alpha)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}{\beta-2\alpha\alpha-\alpha(p+u)-pu}=C\ ,$$

unde aequatio ita poterit repraesentari:

$$pu+\alpha(p+u)+2\alpha\alpha-\beta=C(p+u+2\alpha)$$

sive

$$pu-\beta=f(p+u+2\alpha)\ .$$

Quodsi hic loco α et β valores assumtos restituamus, qui erant

$$\alpha=\frac{an}{1+nn}\quad\text{et}\quad\beta=\frac{1+aa}{1+nn}\ ,$$

aequatio nosta erit:

$$(1+nn)pu-aa-1=f((1+nn)(p+u)+2an)\ .$$

Ubi notandum est esse $u=\frac{y}{x}$ et $p=\frac{dy}{dx}$, ita ut haec aequatio adhuc sit differentialis. Ad eam integrandam cum posuerimus $y=ux$ et $dy=pdx$, erit $pdx=udx+xdu$, unde colligitur $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Nunc vero ex postrema aequatione inventa valorem ipsius p per u definire licet, quo invento aequatio differentialis $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$ est separata, cuius ergo integratio nulla laborat difficultate. Inde igitur x exprimetur per certam functionem ipsius $u=\frac{y}{x}$, quae ergo erit aequatio inter x et y; at vero pro coordinata z iam vidimus esse $z=ny+ax$ sicque solutio hactenus tradita est perfecta.

30. Commode autem hic evenit, ut hoc algebraice expediri queat. Cum enim sit $p=\frac{\beta+f(u+2\alpha)}{u-f}$, facta substitutione reperitur

$$\frac{dx}{x}=\frac{du(u-f)}{\beta+2\alpha f+2fu-uu}\ ,$$

cuius integrale manifesto est:

$$lx=C-\tfrac{1}{2}l(\beta+2\alpha f+2fu-uu)\ ,$$

unde sumtis numeris erit

$$x\sqrt{\beta+2\alpha f+2fu-uu}=g\ .$$

Denique, si hic loco u scribamus $\frac{y}{x}$, prodit ista aequatio:

$$\beta xx + 2\alpha fxx - 2fxy - yy = gg ,$$

unde adeo patet hanc proiectionem esse sectionem conicam. Ac si hic loco y scribamus $\frac{z - ax}{n}$, obtinetur aequatio inter x et z pro altera proiectione, quae ergo etiam erit pro sectione conica. Hinc intelligitur hoc problema, quod difficillimum videbatur, ad solutionem simplicissimam esse perductum.

PROBLEMA 5

Posito $\sqrt{(xx + yy + zz)} = v$, *si fuerit* w *functio quaecunque ipsius* v, *invenire curvam per ternas coordinatas* x, y *et* z *definiendam, in qua haec formula integralis:*

$$\int w \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

maximum minimumve valorem obtineat.

SOLUTIO

31. Facto igitur $dy = pdx$ et $dz = qdx$ positoque $\sqrt{(1 + pp + qq)} = s$, erit formula nostra Maximi $\int wsdx$ ideoque $V = ws$; tum vero posito $dw = w'dv$ ob

$$dv = \frac{xdx + ydy + zdz}{v} \quad \text{et} \quad ds = \frac{pdp + qdq}{s}$$

erit

$$dV = sw' \frac{(xdx + ydy + zdz)}{v} + \frac{w(pdp + qdq)}{s} .$$

Hinc ergo habebimus:

$$M = \frac{w'sx}{v} , \quad N = \frac{w'sy}{v} , \quad N' = \frac{w'sz}{v} , \quad P = \frac{wp}{s} , \quad P' = \frac{wq}{s} .$$

Ex his porro colligitur:

$$S = \frac{w(ss - pp - qq)}{s} = \frac{w}{s} .$$

32. Ternae ergo aequationes, ex quibus solutionem peti oportet, erunt:

$$\text{I.} \quad \frac{w'sxdx}{v} = d \cdot \frac{w}{s} ,$$

$$\text{II.} \quad \frac{w'sydx}{v} = d \cdot \frac{wp}{s} ,$$

$$\text{III.} \quad \frac{w'szdx}{v} = d \cdot \frac{wq}{s} .$$

Hinc igitur cum sit:

$$d \cdot \frac{wp}{s} = \frac{wdp}{s} + p \cdot d \cdot \frac{w}{s} \quad \text{et} \quad d \cdot \frac{wq}{s} = \frac{wdq}{s} + q \cdot d \cdot \frac{w}{s} ,$$

si hic loco $d \cdot \frac{w}{s}$ scribatur eius valor ex prima aequatione $\frac{w'sxdx}{v}$, nanciscemur binas sequentes aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{w's}{v} (ydx - xdy) = \frac{wdp}{s} ,$$

$$\text{II.} \quad \frac{w's}{v} (zdx - xdz) = \frac{wdq}{s} ,$$

quae sub forma sequente repraesententur:

$$\text{I.} \quad \frac{ydx - xdy}{vv} = \frac{wdp}{w'vss}$$

et

$$\text{II.} \quad \frac{zdx - xdz}{vv} = \frac{wdq}{w'vss} ,$$

haeque sunt binae aequationes, ex quibus solutionem desideratam derivare debemus.

33. Primo igitur harum aequationum alteram per alteram dividamus et habebimus

$$\frac{zdx - xdz}{ydx - xdy} = \frac{dq}{dp} ,$$

unde ob $dy = pdx$ et $dz = qdx$ deducimus hanc aequationem:

$$\frac{dq}{z - qx} = \frac{dp}{y - px} ,$$

ita ut sit

$$-\frac{xdq}{z - qx} = -\frac{xdp}{y - px} ;$$

ubi, cum numeratores sint differentialia denominatorum, integratio statim praebet

$$z - qx = m(y - px) .$$

Hoc valore substituto aequatio illa differentialis praebet $dq = mdp$ hincque integrando erit $q = mp + n$, qui valor in illa integrata substitutus praebet $z = my + nx$, quae, cum coordinatae unicam tantum obtineant dimensionem, indicat totam curvam satisfacientem in eodem plano esse sitam. Hinc igitur iam ex nostris aequationibus principalibus binas quantitates z et q elidere poterimus, unde fiet

$$vv = xx + yy + (my + nx)^2$$

et

$$ss = 1 \quad + pp + (mp + n)^2 ,$$

sicque unica tantum restabit aequatio resolvenda, scilicet:

$$\frac{ydx - xdy}{vv} = \frac{wdp}{w'vss} ,$$

in qua ante omnia statuamus $y = ux$, ut ea transfundatur in hanc formam:

$$-\frac{du}{1 + uu + (mu + n)^2} = \frac{wdp}{w'v(1 + pp + (mp + n)^2)} ,$$

quae posito brevitatis gratia $\frac{w}{w'v} = r$ ita repraesentetur:

$$\frac{du}{1 + uu + (mu + n)^2} + \frac{rdp}{1 + pp + (mp + n)^2} = 0 ,$$

in qua ergo binae formulae differentiales inter se prorsus similes continentur.

34. Evidens autem est integrationem utriusque partis, omissa scilicet littera r, ad certum arcum circularem reduci. Hanc ob rem hos ipsos angulos in calculum introducamus ponendo:

$$\frac{\gamma du}{1 + uu + (mu + n)^2} = d\varphi$$

et

$$\frac{\gamma dp}{1 + pp + (mp + n)^2} = d\psi .$$

Sicque aequatio nostra ad hanc formam simplicissimam reducetur: $d\varphi + rd\psi = 0$. Totum igitur negotium huc redit, quemadmodum hanc aequationem

tractari atque ad integrabilitatem reduci oporteat. Evidens autem est hanc aequationem differentialia secundi gradus involvere.

35. Facile quidem patet angulum φ ita esse comparatum, ut eius tangens tali forma: $\alpha u + \beta$ exprimatur; quare, si statuamus tg $\varphi = \alpha u + \beta$, erit

$$d\varphi = \frac{\alpha du}{1 + (\alpha u + \beta)^2} .$$

Haec iam forma cum proposita comparetur, ut inde valores litterarum α et β una cum γ per litteras m et n determinentur, id quod fiet hanc aequationem:

$$\alpha(1 + uu + (mu + n)^2) = \gamma(1 + (\alpha u + \beta)^2) ,$$

identicam reddendo. Hunc in finem cum facta evolutione sequens oriatur aequatio:

$$\alpha(mm + 1)uu + 2\alpha mnu + \alpha(nn + 1) = \alpha\alpha\gamma uu + 2\gamma\alpha\beta u + \gamma(\beta\beta + 1) ,$$

inde tres sequentes elicimus determinationes:

$$1^\circ.\ \alpha\gamma = mm + 1 , \quad 2^\circ.\ \beta\gamma = mn , \quad 3^\circ.\ \gamma(\beta\beta + 1) = \alpha(nn + 1) ,$$

ex quarum prima colligitur $\alpha = \frac{mm + 1}{\gamma}$, ex secunda $\beta = \frac{mn}{\gamma}$, qui valores in tertia substituti dant $\gamma\gamma = mm + nn + 1$ ideoque $\gamma = \sqrt{mm + nn + 1}$ hincque

$$\alpha = \frac{mm + 1}{\sqrt{(mm + nn + 1)}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{mn}{\sqrt{(mm + nn + 1)}} .$$

36. Postquam igitur litteras α, β, γ per m et n determinaverimus, erit tg $\varphi = \alpha u + \beta$. Deinde cum supra invenerimus:

$$1 + uu + (mu + n)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(1 + (\alpha u + \beta)^2) ,$$

si loco u valorem $\frac{y}{x}$ restituamus, prodibit:

$$xx + yy + (my + nx)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(xx + (\alpha y + \beta x)^2) ,$$

ubi prius membrum est ipse valor ipsius vv, unde ergo sequitur fore:

$$xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \frac{\alpha}{\gamma} vv = \frac{(mm + 1)vv}{mm + nn + 1} .$$

Praeterea vero habebimus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha y + \beta x}{x} \ ;$$

unde, si loco

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mm+1}{mm+nn+1}$$

scribamus $\delta\delta$, ut sit

$$xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \delta\delta vv \ ,$$

erit

$$\sin\varphi = \frac{\alpha y + \beta x}{\delta v} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\delta v}$$

hincque porro:

$$\alpha y + \beta x = \delta v \sin\varphi \quad \text{et} \quad x = \delta v \cos\varphi$$

existente $\delta = \sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}$. Hinc patet, simodo angulus φ daretur per v, tam x quam y per eandem quantitatem v expressum iri sicque totum problema perfecte solutum fore.

37. Simili vero modo, cum posuerimus

$$d\psi = \frac{\gamma dp}{1 + pp + (mp+n)^2} \ ,$$

statui poterit $\operatorname{tg}\psi = \alpha p + \beta$, ubi litterae α, β, γ pristinos retinebunt valores, eritque etiam ut ante:

$$1 + (\alpha p + \beta)^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(1 + pp + (mp+n)^2) = \frac{\alpha}{\gamma} ss \ ;$$

tum vero aequatio principalis resolvenda est: $d\varphi + r\,d\psi = 0$ existente $r = \frac{w}{w'v}$, ita ut sit

$$d\psi + \frac{w'v\,d\varphi}{w} = 0 \ .$$

38. Quoniam autem in formulis praecedentibus adhuc litterae x et y insunt, pro determinanda relatione inter v et φ eas ex calculo excludi conveniet, quod commodissime praestabitur ope aequationum

$$\alpha y + \beta x = \delta v \sin\varphi \quad \text{et} \quad x = \delta v \cos\varphi \ ,$$

quae differentiatae praebent:

$$\alpha dy + \beta dx = \delta(dv \sin\varphi + v d\varphi \cos\varphi) \quad \text{et} \quad dx = \delta(dv \cos\varphi - v d\varphi \sin\varphi),$$

quarum illa per hanc divisa, ob $dy = p dx$ praebet:

$$\alpha p + \beta = \frac{dv \sin\varphi + v d\varphi \cos\varphi}{dv \cos\varphi - v d\varphi \sin\varphi}.$$

Vidimus autem esse $\alpha p + \beta = \operatorname{tg} \psi$, ideoque erit nunc:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dv \sin\varphi + v d\varphi \cos\varphi}{dv \cos\varphi - v d\varphi \sin\varphi}.$$

39. In huius aequationis resolutione praecipuum artificium consistit. Si scilicet statuamus $v d\varphi = t dv$, ut oriatur haec aequatio:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin\varphi + t\cos\varphi}{\cos\varphi - t\sin\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + t}{1 - t\operatorname{tg}\varphi},$$

haec postrema formula manifesto exprimit tangentem summae duorum angulorum, quorum alter est φ, alterius vero tangens $= t$, sicque horum angulorum summa aequabitur ipsi angulo ψ, ita ut iam sit $\psi = \varphi + \operatorname{Arc\,tg} t$, quae aequatio differentiata dat

$$d\psi = d\varphi + \frac{dt}{1 + tt},$$

qui valor in nostra aequatione principali substitutus praebet

$$\frac{w' v d\varphi}{w} + d\varphi + \frac{dt}{1 + tt} = 0,$$

quo quidem parum lucrati videmur, quandoquidem haec aequatio ob $t = \frac{v d\varphi}{dv}$ adhuc differentialia secundi gradus involvit, atque adeo tres variabiles v, φ et t implicat, quas quidem ad duas revocare liceret, si loco t valorem assumtum $\frac{v d\varphi}{dv}$ scribere vellemus, quo autem facto in aequationem maxime perplexam incideremus.

40. At vero, quoniam posuimus $\frac{v d\varphi}{dv} = t$, sumamus potius valorem $d\varphi = \frac{t dv}{v}$, qui in nostram aequationem introductus praebet

$$\frac{w' t dv}{w} + \frac{t dv}{v} + \frac{dt}{1 + tt} = 0,$$

haecque aequatio per t divisa ob $w'dv = dw$ induit hanc formam pulcherrimam:

$$\frac{dw}{w} + \frac{dv}{v} + \frac{dt}{t(1+tt)} = 0 ,$$

cuius integratio nulla prorsus laborat difficultate. Cum enim sit

$$\int \frac{dt}{t(1+tt)} = l \frac{t}{\sqrt{1+tt}} ,$$

aequatio nostra integralis erit:

$$\frac{wvt}{\sqrt{1+tt}} = C ,$$

hocque modo iam unam integrationem absolvimus, ita ut unica tantum nobis adhuc peragenda relinquatur.

41. Ex hac iam aequatione eliciamus valorem ipsius t, qui reperitur

$$= \frac{C}{\sqrt{wwvv - CC}} ,$$

unde cum sit $t = \frac{vd\varphi}{dv}$, hinc colligimus fore

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(wwvv - CC)}} ,$$

quae est aequatio finalis totum negotium absolvens. Cum enim w sit functio ipsius v, hinc angulus φ per quantitatem v expressus reperitur, qui novam constantem recipiet, ita ut iam in calculo habeamus quatuor constantes arbitrarias, scilicet, praeter hanc novam istas tres C, m et n, siquidem erat, ut vidimus,

$$\alpha = \frac{mm+1}{\sqrt{(mm+nn+1)}}, \quad \beta = \frac{mn}{\sqrt{(mm+nn+1)}}, \quad \gamma = \sqrt{mm+nn+1}, \quad \delta = \sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}.$$

Unde patet nostram solutionem penitus esse completam, propterea quod initio deducti fuimus ad duas aequationes differentiales secundi gradus, quarum ergo integralia completa necessario quatuor constantes arbitrarias postulant.

42. Postquam autem determinatus fuerit angulus φ, pro quovis valore litterae v ternae coordinatae x, y et z per sequentes formulas facillime definiuntur:

I. $x = \delta v \cos\varphi$,
II. $\alpha y + \beta x = \delta v \sin\varphi$,
III. $z = my + nx$.

Caeterum statim, atque invenerimus totam curvam in eodem plano esse sitam, potuissemus solutionem multo faciliorem adornare. Tantum enim planum principale AOB, cuius positio ab arbitrio nostro pendet, in ipso plano curvae satisfacientis accipere licuisset, unde statim habuissemus $z = 0$ ideoque etiam $q = 0$, quo pacto tota quaestio ad binas tantum variabiles fuisset reducta et methodo communi resolvi potuisset. Verum praeterquam, quod nostra solutio nobis hanc ipsam proprietatem declaravit, maxime operae pretium fuit insignia illa artificia, quae solutio postulat, accurate evolvere.

43. Interim tamen etiam ex ipsa formula integrali, quae Maximum Minimumve esse debet, statim concludere licuisset curvam satisfacientem in eodem plano sitam esse debere, propterea quod ipsa haec formula integralis ad duas tantum variabiles se reduci patitur. Cum enim quantitas

$$v = \sqrt{xx + yy + zz}$$

in figura exprimat rectam OZ, cuius ergo littera w denotat functionem quamcunque, tum vero formula $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ referat ipsum elementum curvae, formula integralis proposita duas tantum variabiles, scilicet distantiam $OZ = v$ et arcum curvae, involvit hincque adeo istud problema sequenti modo proponi et resolvi potuisset, ut quaereretur in plano curva EZz (Fig. 2) circa centrum C describenda, in qua posita distantia $CZ = v$ cuius functio quaecunque sit w, haec formula integralis $\int w ds$ sit Maximum vel Minimum denotante ds elementum curvae Zz.

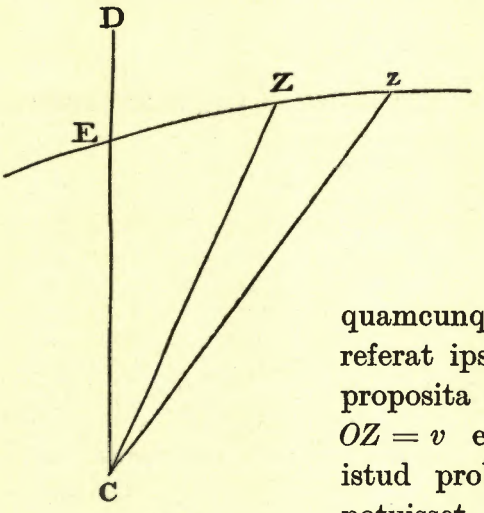


Fig. 2

44. Quo iam solutionem facillimam reddamus atque ex vulgaribus principiis isoperimetricis commodissime repetere valeamus, designemus distantiam CZ littera x, tum vero constituta recta fixa CD, ponatur angulus $DCZ = y$ fietque elementum curvae $ds = \sqrt{dx^2 + xxdy^2}$; et cum iam w sit functio quaecunque ipsius x, formula integralis, quae Maximum Minimumve esse debeat, erit: $\int w\sqrt{(dx^2 + xxdy^2)}$, quae posito $dy = pdx$ induit hanc formam: $\int wdx\sqrt{1 + ppxx}$, ita ut hic sit $V = w\sqrt{1 + ppxx}$. Posito ergo in genere $dV = Mdx + Ndy + Pdp$, quia ipsa quantitas y hic non adest, erit

$$N = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{wx^2p}{\sqrt{(1 + ppxx)}},$$

littera autem M plane in computum non ingreditur, cum aequatio pro curva quaesita sit $Ndx = dP$ sive $dP = 0$, unde statim sequitur

$$P = \frac{wpxx}{\sqrt{(1 + ppxx)}} = C ,$$

quae ipsa aequatio naturam curvae iam declarat.

45. Ex hac autem aequatione elicimus $p = \frac{C}{x\sqrt{(wwxx - CC)}}$, sicque ob $p = \frac{dy}{dx}$ erit

$$dy = \int \frac{Cdx}{x\sqrt{wwxx - CC}} ,$$

quae aequatio perfecte cum ea congruit, quam ante per tantas ambages sumus consecuti, simodo loco x hic restituamus v, tum vero noster angulus, hic y vocatus, idem erit, quem ante designavimus littera φ. Ex hoc exemplo intelligitur, quomodo saepenumero problemata in se difficillima per levem transformationem solutu facillima reddi queant.

INVESTIGATIO ACCURATIOR CIRCA BRACHYSTOCHRONAS

Commentatio 759 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 8 (1817/8), 1822, p. 17—28
Conventui exhibita die 10. Julii 1780

1. Cum primum in Mechanicae meae tomo secundo[1]) hoc argumentum tractassem, incideram in hanc insignem proprietatem, quod, dum corpus super curva Brachystochrona descendit, pressio ex omnibus viribus sollicitantibus orta semper sit aequalis vi centrifugae atque in eandem plagam directa, ita ut ubique tota pressio, quam corpus descendens in curvam exserit, duplo maior sit quam pressio a solis viribus sollicitantibus oriunda. Neque hanc proprietatem solum in hypothesi gravitatis naturalis, et quando corpus versus aliquod centrum virium fixum a viribus quibuscunque urgetur, locum habere deprehendi, sed etiam quando corpus ad duo plurave puncta fixa a viribus quibuscunque sollicitatur. Quamobrem non dubitavi istam proprietatem tanquam principium universale stabilire, cuius ope omnibus plane casibus Brachystochronae inveniri queant neque opus sit ad methodum isoperimetricam recurrere.

2. Ex hoc ipso igitur principio deinceps omnes quoque Brachystochronas in mediis resistentibus derivavi. Postquam autem theoriam isoperimetricam uberius essem perscrutatus, mox deprehendi istud principium in medio resistente admitti non posse, neque tamen quisquam eorum, qui opus meum mechanicum omni studio sunt perscrutati, hunc defectum animadvertit, quem autem ipse in tractatu meo de isoperimetris feliciter emendavi atque adeo veras Brachystochronas pro quovis medio resistente determinare docui.

3. Interim tamen iste error, quem ingenue sum confessus, non est tam enormis, ut non quodammodo non solum excusari sed etiam cum veritate conciliari possit, si modo status quaestionis paulisper immutetur. Quodsi enim non inter omnes plane curvas, quas a termino superiore ad inferiorem ducere licet, sed inter eas tantum, super quibus corpus descendens eandem acquirit celeritatem (quarum numerus utique etiamnunc est infinitus), ea

1) *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 2, p. 170, § 376 et p. 332, Propositio 76, § 673. Confer praeterea Commentationem E 42, huius voluminis p. 41. C. C.

quaeratur, super qua corpus brevissimo tempore a puncto summo usque ad imum perveniat, tum omnes Brachystochronae a me assignatae et ex memorato principio derivatae veritati erunt consentaneae.

4. Quo autem clarius appareat, sub quibusnam conditionibus istud principium locum habeat et quando deficiat, totam theoriam de Brachystochronis accuratius evolvere constitui. Observavi enim, etiamsi motus tantum in vacuo consideretur, tamen eiusmodi vires exhiberi posse, ad quas illud principium neutiquam accomodari possit; quamobrem hoc loco ab omni resistentia animum sum abstracturus, siquidem hoc argumentum in opusculo meo isoperimetrico iam satis prolixe est pertractatum. Quamobrem alias vires non sum contemplaturus, praeter tales, quas vocavi *absolutas*, quarum actio a solo loco, in quo corpus versatur, pendet, neque eius celeritas quicquam ad vires sollicitantes conferat.

5. Haec autem tractatio ultro in duas partes dividitur, prouti totus corporis motus vel in eodem plano absolvitur vel extra idem planum extravagatur. Pro hoc enim discrimine methodus Brachystochronas inveniendi prorsus diversa adhiberi debet, cum casu priore duae coordinatae in calculum introducendae sufficiant, posteriore vero casu necessario tres coordinatae requirantur, qui casus adeo prorsus est novus; neque cuiquam, quantum quidem memini, in mentem venit Brachystochronas, quae non in eodem plano contineantur, investigare; quamobrem secundum hanc differentiam sequentem tractationem bipartito sum propositurus.

I. De Brachystochronis in eodem plano sitis

6. Hic igitur etiam omnes vires sollicitantes in eodem plano sitas esse oportet, quas autem generalissime hic sum consideraturus. Ponamus igitur motum corporis in ipso plano tabulae (Fig. 1) absolvi sitque Ay curva, super qua corpus moveatur, postquam ex puncto A est egressum, quam curvam referamus ad axem Ax et vocemus binas coordinatas $Ax = x$ et $xy = y$, elementum vero curvae yy' vocemus ds, ita ut posito $dy = pdx$ sit $ds = dx\sqrt{1+pp}$; unde, si yO fuerit curvae radius osculi, constat fore $yO = \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Iam a quibuscunque viribus corpus in y sollicitetur, eas semper ad binas yX et yY revocare licet, quae cum coordinatis easdem teneant directiones. Vocemus

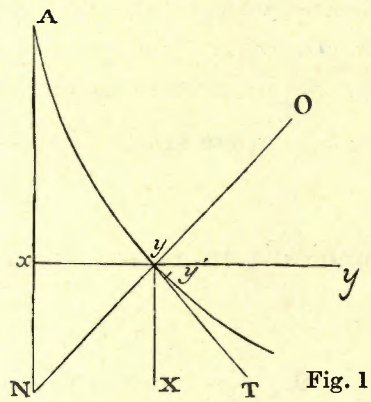


Fig. 1

igitur has vires $yX = X$ et $yY = Y$, et quia actio harum virium a loco corporis y unice pendere assumitur, istas litteras X et Y tanquam functiones quascunque binarum coordinatarum x et y spectare licet. Tum vero has vires iam tanquam acceleratrices specto, quae oriuntur, si verae vires motrices per massam corporis dividantur ideoque per numeros absolutos exprimantur, denotante unitate vim acceleratricem gravitatis naturalis, quacum omnes alias vires comparare licet.

7. Cum igitur, dum corpus super curva Ay descendit, in hoc loco y actionem duarum virium $yX = X$ et $yY = Y$ sustineat, has vires secundum directionem motus seu tangentem yT et directionem ad eam normalem yN resolvantur atque reperietur vis tangentialis $yT = \frac{Xdx + Ydy}{ds}$, altera vero vis normalis $yN = \frac{Xdy - Ydx}{ds}$, a quarum illa motus corporis per elementum yy' procedens accelerabitur, altera autem vis normalis, si in massam corporis ducatur, dabit pressionem, quam corpus in curvam exserit, quae, si massa corporis per M indicetur, erit $\frac{M(Xdy - Ydx)}{ds}$, cui ergo secundum principium supra stabilitum vis centrifuga corporis ex curvatura nata pro Brachystochronis aequalis esse deberet.

8. Designemus nunc celeritatem, qua corpus elementum yy' percurrit, littera v, quae exprimat spatium, quod ista celeritate uno minuto secundo percurreretur; et quo omnia ad mensuras determinatas revocemus, denotet g altitudinem, per quam gravia primo minuto secundo delabuntur, atque ex principiis motus constat fore $vdv = 2gTds$, siquidem T designet vim tangentialem, quae erat $\frac{Xdx + Ydy}{ds}$, ex quo sequitur ista aequatio:

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy);$$

unde determinatio celeritatis ab integratione huius formulae pendet, cum sit

$$vv = 4g \int (Xdx + Ydy).$$

9. Quodsi iam litterae X et Y fuerint tales functiones ipsarum x, y, ut ista formula integrationem admittat, quod evenit, uti constat, si fuerit $\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right)$, tum celeritas corporis v erit functio prorsus determinata binarum variabilium x et y ideoque a solo loco corporis y pendebit. Sin autem haec conditio non habeat locum, tum celeritas non amplius a solo loco y pendebit, sed insuper totum tractum curvae iam percursae Ay involvet, secundum

valores, quos formula Xdx et Ydy per totam curvam percursam Ay recipit; unde hic duo casus sollicite a se invicem distinguendi occurrunt, prouti scilicet formula $Xdx + Ydy$ integrationis est capax nec ne. Mox enim patebit principium supra memoratum solo casu priore locum habere, altero vero casu neutiquam in usum vocari posse.

10. Cum enim tempusculum, quo elementum curvae

$$yy' = ds = dx\sqrt{1+pp}$$

percurritur, sit $\frac{ds}{v}$, ut tempus per curvam Ay evadat minimum sive ut ista curva sit vera Brachystochrona, necesse est ut formula integralis

$$\int\frac{ds}{v} = \int\frac{dx\sqrt{1+pp}}{v}$$

inter omnes curvas, quas a puncto A ad punctum y ducere licet, minimum obtineat valorem. In tractatu autem meo isoperimetrico ostendi, si formula integralis quaecunque $\int Vdx$ debeat esse vel maximum vel minimum, ubi V quomodocunque pendeat non solum ab ipsis binis coordinatis x et y, sed etiam a relatione inter earum differentialia cuiusque ordinis, ita ut posito, ut iam fecimus, $dy = pdx$ porro $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ etc. fueritque

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

tum pro casu maximi vel minimi semper hanc aequationem locum habere:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

quae ergo aequatio tum tantum locum habet, quando V fuerit functio quantitatum x, y, p, q, r etc., hoc est, quando eius valor a solo puncto y et elemento curvae in hoc loco pendet. Quando enim functio V insuper involvat quasdam formulas integrales, tum etiam termini hinc pendentes ad illam aequationem adiici debent, quo casu totus calculus longissimas ambages postulat, quas autem hoc loco non sum suscepturus, sed aequationi hic traditae unice inhaerebo.

11. Hinc igitur manifestum est istam aequationem maximi minimive locum habere non posse, nisi celeritas v sit functio determinata binarum x et y sive si formula $\int(Xdx + Ydy)$ revera integrationem admittat, quem igitur casum hic accuratius sum contemplaturus. Cum igitur pro nostris Brachystochronis fieri debeat

$$\int V dx = \int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} \quad \text{ideoque} \quad V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v},$$

erit

$$dV = -\frac{dv}{vv}\sqrt{1+pp} + \frac{pdp}{v\sqrt{1+pp}},$$

ubi ergo loco dv eius valorem per dx et dy substituere oportet. Supra autem habuimus hanc aequationem: $vdv = 2g(Xdx + Ydy)$, unde fit

$$dv = \frac{2g}{v}(Xdx + Ydy),$$

sicque dv partim per dx partim per dy exprimitur; quamobrem, si hic valor substituatur et comparatio fiat cum forma generali supra memorata:

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

fiet

$$M = -\frac{2gX\sqrt{1+pp}}{v^3}, \quad N = -\frac{2gY\sqrt{1+pp}}{v^3},$$

$$P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}, \quad Q = 0, \quad R = 0 \quad \text{etc.}$$

sicque nunc pro Brachystochrona habebimus hanc simplicem aequationem: $N - \frac{dP}{dx} = 0$ sive $Ndx = dP$, ita ut iam valor ipsius P denuo differentiari debeat. Erit autem

$$dP = -\frac{dv}{vv} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

ideoque

$$dP = -\frac{2g(Xdx + Ydy)}{v^3} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}},$$

cui ergo expressioni aequari debet quantitas

$$Ndx = -\frac{2gYdx\sqrt{1+pp}}{v^3},$$

ex qua porro aequatione colligitur fore:

$$\frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2gXdx}{v^3} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} - \frac{2gYdx}{v^3\sqrt{1+pp}}$$

sive

$$\frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2g}{v^3\sqrt{1+pp}}(Xdy - Ydx).$$

12. Supra autem invenimus vim normalem ex viribus sollicitantibus oriundam et secundum yN urgentem esse $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$, quae si vocetur Θ, ut sit

$$\Theta = \frac{Xdy - Ydx}{dx\sqrt{1+pp}},$$

nostra aequatio inventa erit

$$\frac{1}{v}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = -\frac{2g\Theta dx}{v^3}$$

ideoque erit

$$\Theta = \frac{vv}{2gdx}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Est vero $d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ sicque fiet

$$\Theta = \frac{vv}{2gdx} \cdot \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vidimus autem porro radium osculi in puncto y esse $\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, qui si vocetur r, fiet $\Theta = \frac{vv}{2gr}$. Constat autem hanc formulam $\frac{vv}{2gr}$ exprimere vim centrifugam, qua curva in puncto y a corpore descendente ob ipsam curvaturam premitur, quam ergo vim nunc videmus semper aequalem esse vi normali Θ, quoties formula $\int (Xdx + Ydy)$ integrationem admittit, contra vero aequationem pro Brachystochrona longe aliter se esse habituram eiusque determinationem calculos intricatissimos postulare. Commode autem usu venit, quoties corpus a viribus realibus, cuiusmodi sunt gravitas et vires centripetae quaecunque et quotcunque secundum functiones distantiae quascunque sollicitantes, ut formula $\int (Xdx + Ydy)$ integrationem admittat ideoque principium supra stabilitum revera locum habeat. Excluduntur tantum vires prorsus imaginariae, quae ne locum quidem in rerum natura invenire possunt.

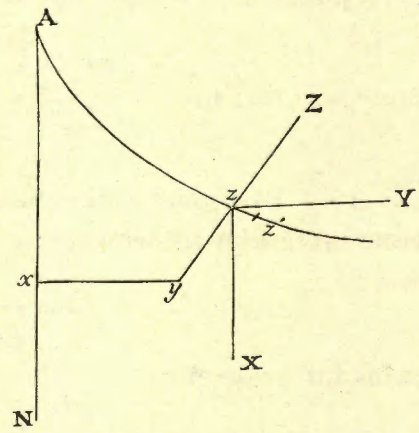


Fig. 2

II. *De Brachystochronis non in eodem plano sitis*

13. Hic casus evenit, quando vires, quibus corpus simul sollicitatur, non in eodem plano fuerint sitae. Sit igitur curva Az (Fig. 2) Bra-

chystochrona quaesita, super qua corpus ex puncto A moveri coeperit. Eius igitur punctum quodvis z per ternas coordinatas determinemus, quae sint $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$; elementum vero curvae vocetur $zz' = ds$, ita ut sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Vires autem sollicitantes, utcunque fuerint comparatae, revocentur ad easdem ternas directiones fixas vocenturque $zX = X$, $zY = Y$, $zZ = Z$, quae ergo quantitates esse possunt functiones quaecunque ternarum variabilium x, y, z.

14. Ut iam motum curvae hinc definiamus, totam rem ex primis principiis motus definiamus, ac posito temporis elemento $= dt$ motus corporis determinatio his tribus formulis continetur:

$$1^\circ.\ \frac{ddx}{dt^2} = 2gX\ ,\quad 2^\circ.\ \frac{ddy}{dt^2} = 2gY\ ,\quad 3^\circ.\ \frac{ddz}{dt^2} = 2gZ\ ,$$

ubi g iterum designat altitudinem lapsus gravium primo minuto secundo, siquidem tempus t in minutis secundis exprimere velimus. Nunc harum aequationum prima per dx, secunda per dy et tertia per dz multiplicatae et integratae dabunt:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 4g\int(Xdx + Ydy + Zdz)\ ,$$

quae aequatio ob $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ reducitur ad hanc:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4g\int(Xdx + Ydy + Zdz)\ .$$

Quare, cum $\frac{ds}{dt}$ exprimat celeritatem, qua corpus elementum zz' percurrit, si ea ponatur $= v$, habebimus hanc eius determinationem:

$$vv = 4g\int(Xdx + Ydy + Zdz)\ ,$$

unde sequitur fore

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy + Zdz)\ .$$

15. Ex iisdem autem formulis differentio-differentialibus conveniet etiam hanc integrabilem derivare:

$$\frac{yddx - xddy}{dt^2} = 2g(yX - xY)\ ,$$

cuius integrale erit

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = 2g\int(yX - xY)dt\ .$$

Iam quia modo invenimus $\frac{ds^2}{dt^2} = vv$, loco dt^2 scribamus $\frac{ds^2}{vv}$ eritque

$$\frac{ydx - xdy}{ds} = \frac{2g}{v}\int (Xy - Yx)\frac{ds}{v} .$$

Eodem modo reperiemus

$$\frac{zdx - xdz}{ds} = \frac{2g}{v}\int (Xz - Zx)\frac{ds}{v} ,$$

denique

$$\frac{zdy - ydz}{ds} = \frac{2g}{v}\int (Yz - Zy)\frac{ds}{v} .$$

Hasque formulas in sequentem unum notasse iuvabit.

16. Inventa iam celeritate corporis talis relatio inter ternas coordinatas x, y, z est investiganda, ut tempus, quo arcus curvae Az percurritur, omnium fiat minimum. In quo ergo negotio ad methodum isoperimetricam est recurrendum. At vero ista methodus, prouti equidem eam tractavi, ad duas tantum variabiles est accomodata; interim tamen et hanc quaestionem ad casum duarum variabilium reducere licet, siquidem in subsidium vocemus, quae de proiectionibus curvarum non in eodem plano sitarum sunt tradita.

17. Consideremus igitur proiectionem nostrae curvae Az (Fig. 3) in plano tabulae factam, quae sit Ay, cuius ergo natura exprimetur aequatione inter binas variabiles x et y, pro qua statuamus $dy = pdx$, eritque elementum huius proiectionis $= dx\sqrt{1 + pp}$. Simili modo in plano ad tabulam normali super axe Ax exstructa sit Av proiectio nostrae curvae, cuius ergo natura exprimetur aequatione inter has duas variabiles $Ax = x$ et $xv = yz = z$, pro qua ponamus $dz = qdx$, ut elementum huius proiectionis sit $dx\sqrt{1 + qq}$. Evidens autem est elementum verae curvae Az fore

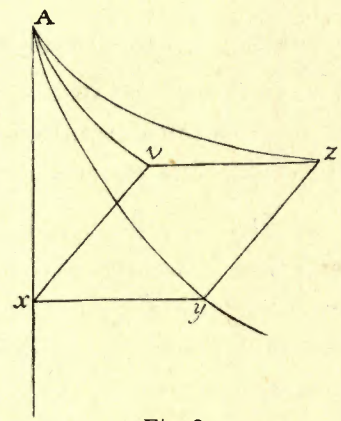


Fig. 3

$$= ds = dx\sqrt{1 + pp + qq} .$$

Priorem proiectionem Ay vocemus iacentem, alteram vero Av erectam.

18. Manifestum autem est, si ambae hae proiectiones fuerint inventae, ex iis iunctim ipsam curvam Az facillime determinari posse. Cum enim abscissa $Ax = x$ utrique proiectioni sit communis, si ex puncto y perpendiculum

erigamus yz ipsi xv aequale, punctum z erit in ipsa curva quaesita. At vero una harum proiectionum negotium neutiquam conficit, cum tam proiectio iacens quam erecta infinitis curvis convenire queat.

19. His probe notatis tota quaestio de minimo quaesito ita biparpita constitui poterit. Primo scilicet spectemus proiectionem erectam tanquam datam atque inter omnes curvas, quibus eadem proiectio erecta respondet, eam quaeramus, in qua formula integralis $\int \frac{ds}{v}$ minimum obtineat valorem, id quod per duas tantum coordinatas praestari poterit. Cum enim proiectio erecta $A\,x\,v$ tanquam data spectetur, eius applicata z tanquam functio abscissae x spectari poterit eodemque modo etiam quantitas $q = \frac{dz}{dx}$ erit functio ipsius x, atque si praecepta isoperimetrica ad hunc casum applicemus, reperiemus inter omnes curvas eandem proiectionem erectam habentes eam, pro qua formula $\int \frac{ds}{v}$ minimum sortitur valorem.

20. Eodem modo proiectio iacens $A\,x\,y$ tanquam cognita spectetur atque inter omnes curvas hanc proiectionem communem habentes per eandem methodum maximorum et minimorum quaeratur ea, pro qua eadem formula $\int \frac{ds}{v}$ minimum obtineat valorem, et nunc in hac investigatione tam y quam $p = \frac{dy}{dx}$ pro functionibus ipsius x haberi poterunt, ita ut tantum binae reliquae x et z iam variabiles reputari debeant atque calculus per eadem praecepta atque ante expediri poterit, simodo loco y scribamus z et q loco p.

21. Quodsi iam hoc modo tam inter omnes curvas eandem proiectionem erectam habentes quam inter omnes eandem iacentem habentes invenerimus curvam minimi, quoniam pro priore prodiit certa aequatio inter x et y, pro altera vero aequatio inter x et z, hae duae determinationes iunctim sumtae praebebunt veram Brachystochronam, inter omnes plane curvas possibiles.

22. Secundum haec praecepta iam facile erit Brachystochronas eruere sive eas curvas, in quibus formula

$$\int \frac{dx\sqrt{1 + pp + qq}}{v}$$

minimum accipit valorem. Hic autem, ut ante, necesse est, ut v sit functio determinata variabilium x, y, z, id quod evenire nequit, nisi formula

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \frac{vv}{4g}$$

integrationem admittat, quamobrem hos solos casus hic tractabimus. Hinc igitur erit

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy + Zdz) \quad \text{ideoque} \quad dv = \frac{2g}{v}(Xdx + Ydy + Zdz) .$$

Primo ergo proiectionem erectam tanquam datam spectemus, ita ut tam z quam q sint functiones solius x; unde, si ponamus

$$d \cdot \frac{\sqrt{1 + pp + qq}}{v} = Mdx + Ndy + Pdp ,$$

aequatio pro curva quaesita erit $Ndx - dP = 0$, ubi commode evenit, ut quantitas M non in hanc aequationem ingrediatur.

23. Quoniam igitur quantitate M prorsus non indigemus, in hac differentiatione duae tantum in computum veniunt variabiles, scilicet y et p, quoniam z et q pro functionibus ipsius x habentur earumque differentialia continerentur in membro Mdx, quod reiicere licet. Quare valores litterarum N et P per differentiationem quaeri oportet, et quoniam quantitas p in celeritatem v non ingreditur, pro membro Pdp hinc statim oritur

$$P = \frac{p}{v\sqrt{1 + pp + qq}} .$$

24. Restat igitur variabilis v, quae ut functio tantum ipsius y spectari poterit, sicque pro usu nostro praesente erit

$$dv = \frac{2gYdy}{v} \quad \text{ideoque} \quad d \cdot \frac{1}{v} = -\frac{2gYdy}{v^3},$$

sicque erit

$$N = -\frac{2gY}{v^3} \cdot \sqrt{1 + pp + qq} .$$

Hinc ergo aequatio quaesita elicitur:

$$+\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1 + pp + qq} + d \cdot \frac{p}{v\sqrt{1 + pp + qq}} = 0 .$$

25. Simili modo, si proiectionem iacentem pro cognita assumamus, ut iam y et p sint functiones tantum ipsius x, aequatio ante inventa ad hunc casum transferetur, si tantum literae y et z itemque p et q inter se permutentur. Hoc modo prodit ista aequatio:

$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1 + pp + qq} + d \cdot \frac{q}{v\sqrt{1 + pp + qq}} = 0 ,$$

quae aequatio cum praecedente coniuncta determinabit ipsam Brachystochronam quaesitam, quandoquidem eius determinatio requirit duas aequationes, propterea quod pro qualibet abscissa x binae reliquae y et z definiri debent.

26. Ecce ergo Problematis nostri resolutio his duabus aequationibus continetur:

$$\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0$$

$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{q}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0\,,$$

ubi iam omnes plane quantitates pro variabilibus sunt habendae. Hic autem posteriores formulas aliquanto magis evolvi conveniet ope huius reductionis:

$$d\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=-\frac{dv}{vv}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{1}{v}d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}\,.$$

Nunc autem ob

$$dv=\frac{2g(Xdx+Ydy+Zdz)}{v}$$

erit

$$\frac{dv}{vv}=+\frac{2g(Xdx+Ydy+Zdz)}{v^3}$$

hincque nostrae duae aequationes sequentes formas induent:

$$\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}-\frac{2g(Xdx+Ydy+Zdz}{v^3}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{1}{v}d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}-\frac{2g(Xdx+Ydy+Zdz)}{v^3}\cdot\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{1}{v}d\cdot\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}=0.$$

Multiplicentur hae aequationes per $\frac{v^3}{2g}$ et partes priores ad denominatorem $\sqrt{1+pp+qq}$ reductae sequenti modo referentur:

$$\frac{(Y(1+qq)-pX)dx-pZdz}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{vv}{2g}d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}=0$$

$$\frac{(Z(1+pp)-qX)dx-qYdy}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{vv}{2g}d\cdot\frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}=0\,,$$

quae aequationes porro ob $dy = pdx$ et $dz = qdx$ ita transformabuntur:

$$\frac{Y(1+qq) - pX - pqZ}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2gdx}\, d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0$$

$$\frac{Z(1+pp) - qX - pqY}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2gdx}\, d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0 \,.$$

Quodsi hic deleamus terminos z et q continentes, aequatio pro casu praecedente inventa ex priore aequatione manifesto oritur, ex ea quippe prodit:

$$\frac{Xp - Y}{\sqrt{1+pp}} = \frac{vv}{2g}\, d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \,,$$

quae aequatio cum supra inventa egregie convenit; posterior vero aequatio hoc casu plane evanescit.

DE VERA BRACHYSTOCHRONA SEU LINEA CELERRIMI DESCENSUS IN MEDIO RESISTENTE

Commentatio 760 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 8 (1817/8), 1822, p. 29—40
Conventui exhibuit die 13. Novembris 1780

1. Quae de his curvis in Mechanicae meae tomo II[1]) tradidi, eiusmodi nituntur principio, quod in medio resistente admitti non potest. Deinde in Tractatu meo isoperimetrico idem argumentum ex primis Maximorum et Minimorum principiis expedire sum conatus; verum, quae de Brachystochrona in medio resistente ibi attuli, tantopere sunt in formulis analyticis nimis generalibus involuta, ut vix quisquam veram indolem harum curvarum inde eruere valeat. Quamobrem hoc idem argumentum hic maiori studio evolvere atque ex primis principiis clare et perspicue derivare constitui.

2. Hunc in finem consideremus curvam quamcunque AYC ad axem verticalem AB relatam, super qua corpus ex A labi incipiens (Fig. 1) descendat in medio resistente secundum rationem quamcunque multiplicatam celeritatis. Iam pro puncto curvae quocunque Y vocetur abscissa $AX = x$, applicata $XY = y$ et arcus curvae $AY = s$. Celeritas autem in Y sit v, cuius ergo quantitas tali aequatione exprimetur:

$$v\,dv = g\,dx - h v^{n+1}\,ds\ ,$$

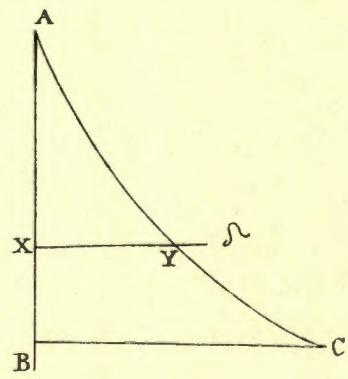


Fig. 1

quae ita est comparata, ut non nisi casibus $n = -1$ et $n = +1$ in genere integrari queat. Interim tamen valore ipsius v inde definito elementum temporis erit $\frac{ds}{v}$, cuius ergo integrale proprietatem minimi obtineri debet, siquidem curva AYC fuerit Brachystochrona.

1) Confer notam paginae 314 adiectam. C. C.

3. Si motus fieret in vacuo, quo casu foret $h = 0$ et $vv = 2gx$, quia celeritas in Y a sola eius altitudine penderet, evidens est, ut tota curva AYC evadat Brachystochrona, etiam singulas eius partes AY minimo tempore percurri debere. At vero in medio resistente res longe aliter se habet, ubi celeritas non amplius a loco puncti Y pendet, sed simul totum arcum praecedentem AY involvit; unde fieri potest, ut tempus per totum arcum AYC fiat minimum, etiamsi tempus per arcum AY non esset minimum, scilicet fieri posset, ut descensu per arcum AY in Y aliquanto maior celeritas generaretur, quae tanto brevius tempus per sequentem arcum YC producat; quamobrem nostrum problema pro medio resistente ita proponi debet:

Inter omnes curvas, quas a puncto A usque ad C ducere licet, ea quaeratur, super qua corpus, descensum ex A incipiens, citissime ad terminum C perveniat.

4. Quo autem haec investigatio latius pateat, problema multo generalius, quod non ad solas Brachystochronas sit restrictum, contemplabor, propterea quod solutio non solum non fit difficilior, sed etiam facilius ad formulas analyticas reduci patitur; quamobrem sequens problema ante omnia expediri conveniet:

Problema generale

Inter omnes curvas, quae a dato puncto A ad datum punctum C duci possunt, eam investigare, in qua ista formula integralis: $\int V dx$ maximum minimumve obtineat valorem; ubi littera V praeter coordinatas x et y earumque differentialia cuiuscunque ordinis etiam quantitatem v involvat, quae per aequationem quamcunque differentialem determinetur.

SOLUTIO

5. Cum functio V etiam differentialia cuiusvis ordinis implicare sumatur, ponamus more solito $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ etc., ita ut iam V praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam quantitatem illam v involvat; unde eius differentiale huiusmodi habebit formam:

$$dV = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

quantitas autem v per hanc aequationem differentialem exprimatur: $dv = \mathfrak{V} dx$; ubi $\mathfrak{V}$ sit functio quaecunque ipsius v cum quantitatibus ad curvam pertinentibus x, y, p, q, r etc. Quocirca eius differentiale talem habebit formam:

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{L} dv + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \text{etc.}$$

6. Quo nunc formulae integrali $\int V dx$ valor maximus minimusve conciliari possit, methodo utamur ex calculo variationum petita, quem in finem tribuamus applicatis $XY = y$ incrementum quam minimum $Y\delta$, quod per δy indicemus, ita ut δy sit variatio ipsius y; alteri vero coordinatae x nullam variationem tribui opus est, ita ut sit $\delta x = 0$. Quatenus ergo reliquae quantitates ab applicata y pendent, eatenus eae etiam certas variationes recipient, quas ante omnia evolvere necesse est.

7. Ponamus brevitatis gratia variationem $\delta y = \omega$, et cum sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $\delta p = \frac{\delta dy}{dx}$. Demonstratum autem est esse $\delta dy = d\,\delta y = d\omega$, unde fit $\delta p = \frac{d\omega}{dx}$. Simili modo, cum sit $q = \frac{dp}{dx}$, erit

$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\,\delta p}{dx} = \frac{dd\omega}{dx^2}.$$

Pariter manifestum est fore $\delta r = \frac{d^3\omega}{dx^3}$ etc. Hic scilicet ubique littera δ cuique quantitati praefixa designat eius variationem ex variatione ipsius y oriundam.

8. His positis investigemus variationem ipsius formulae integralis propositae $\int V dx$, quae ergo erit $= \delta \int V dx$. Ex calculo autem variationum constat esse $\delta \int V dx = \int \delta V dx$, et quia variationes eadem lege capere licet, qua differentialia indicantur, erit

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{etc.},$$

ubi terminus $M\delta x$ evanescit; ac si loco δy, δp, δq, δr etc. valores modo inventi scribantur, habebimus:

$$\delta V = L\delta v + N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qdd\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}$$

Hinc ergo variatio formulae integralis propositae erit:

$$\delta \int V dx = \int dx \left(L\delta v + N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qdd\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

sive

$$\delta \int V dx = \int L\delta v dx + \int N\omega dx + \int P d\omega + \int \frac{Qdd\omega}{dx} + \text{etc.}$$

Totum ergo negotium huc redit, ut primi membri $\int L\delta v dx$ valor omni cura evolvatur.

9. Ex paragrapho 5 sequitur $v = \int \mathfrak{V} dx$, hinc erit $\delta v = \delta \int \mathfrak{V} dx = \int \delta \mathfrak{V} dx$; quare cum sit

$$d\mathfrak{V} = \mathfrak{L} dv + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \text{etc.},$$

erit simili modo:

$$\delta \mathfrak{V} = \mathfrak{L} \delta v + \mathfrak{M} \delta x + \mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{etc.},$$

hoc est:

$$\delta \mathfrak{V} = \mathfrak{L} \delta v + \mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.},$$

consequenter habebimus:

$$\delta v = \int dx \left(\mathfrak{L} \delta v + \mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right),$$

ex qua aequatione nunc valorem ipsius δv erui oportet.

10. Hunc in finem, quo calculus magis sublevetur, ponamus $\delta v = u$, eritque differentialibus sumtis:

$$du = \mathfrak{L} u dx + \mathfrak{N} \omega dx + \mathfrak{P} d\omega + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx} + \text{etc.},$$

quae aequatio ita repraesentetur:

$$du - \mathfrak{L} u dx = \mathfrak{N} \omega dx + \mathfrak{P} d\omega + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx} + \text{etc.},$$

quae ut integrabilis reddatur, multiplicetur per $e^{-\int \mathfrak{L} dx}$, cuius loco brevitatis gratia scribamus $\frac{1}{\Lambda}$, ita ut sit $\Lambda = e^{\int \mathfrak{L} dx}$ ideoque $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L} dx$. Tum igitur aequatio integralis erit:

$$\frac{u}{\Lambda} = \int \frac{dx}{\Lambda} \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

hocque modo adepti sumus valorem quaesitum δv, qui erit:

$$\delta v = \Lambda \int \frac{dx}{\Lambda} \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

11. Nunc igitur pro primo termino formulae, qua variatio $\delta \int V dx$ exprimitur, habebimus:

$$\int L \Lambda dx \int \frac{dx}{\Lambda} \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right),$$

ubi post signum integrationis $\int$ adhuc aliud involvitur, unde in id erit incumbendum, ut omnia ad simplicem integrationem revocentur.

12. Hunc in finem statuamus $L\Lambda dx = d\Pi$, eritque

$$\int d\Pi \int \frac{dx}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\,\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \text{etc.}\right) = \Pi\int\frac{dx}{\Lambda}(\mathfrak{N}\,\omega + \text{etc.}) - \int\frac{\Pi dx}{\Lambda}(\mathfrak{N}\,\omega + \text{etc.}).$$

Iam quia est $\Pi = \int L\Lambda dx$, constans huic integrali adiicienda nostro arbitrio relinquitur; unde ista constans ita determinetur, ut pro tota curva AYC, ubi fiat $x = AB = a$, ista quantitas Π evanescat, quippe quo pacto prior pars $\Pi\int\frac{dx}{\Lambda}(\mathfrak{N}\,\omega + \text{etc.})$ pro tota curva, ad quam calculum instrui oportet, sponte evanescet, siquidem ipsa formula integralis adiuncta aliter ad nihilum redigi nequit. Quocirca, integrali $\int L\Lambda dx = \Pi$ ita accepto, ut posito $x = a$ evanescat, erit:

$$\int L dx\,\delta v = -\int\frac{\Pi dx}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\,\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}ddw}{dx^2} + \text{etc.}\right).$$

13. Hoc iam valore invento variatio quaesita $\delta\int V dx$ erit sequenti modo expressa:

$$-\int\frac{\Pi dx}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\,\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}ddw}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+\int dx\left(N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qddw}{dx^2} + \text{etc.}\right),$$

quae expressio, ponendo brevitatis gratia:

$$N - \frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda} = N', \quad P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda} = P', \quad Q - \frac{\Pi\mathfrak{Q}}{\Lambda} = Q' \quad \text{etc.},$$

ad hanc formam satis simplicem reducitur:

$$\delta\int V dx = \int dx\left(N'\omega + \frac{P'd\omega}{dx} + \frac{Q'ddw}{dx^2} + \text{etc.}\right),$$

cuius ergo valor per totam curvam AYC, hoc est usque ad $x = a$ extensus, nihilo aequari debet.

14. Quo haec formula ulterius reducatur, notetur esse

$$\int P'd\omega = P'\omega - \int\omega dP';$$

deinde

$$\int Q'ddw = Q'd\omega - \int d\omega dQ'.$$

At vero est

$$\int d\omega dQ' = \omega dQ' - \int \omega d dQ' ,$$

ideoque

$$\int Q' \, dd\omega = Q' d\omega - \omega dQ' + \int \omega d dQ' .$$

Eodemque modo erit

$$\int R' d^3\omega = R' dd\omega - d\omega dR' + \omega d dR' - \int \omega d^3 R'$$

et ita porro; ubi, quia in extremo termino C nulla variatio ω adhibetur, partes absolutas prorsus negligere licet ideoque habebimus

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + \text{etc.} \right) ,$$

euius ergo valor per totam curvam ab A ad C extensus, nihilo aequari debet, utcunque variationes ω accipiantur.

15. Evidens autem est hoc aliter fieri non posse, nisi fuerit

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0 ,$$

qua ergo aequatione ipsa curva determinabitur, in qua formula integralis proposita maximum minimumve valorem sortitur; ubi meminisse oportet esse

$$N' = N - \frac{\Pi \mathfrak{N}}{\Lambda} , \quad P' = P - \frac{\Pi \mathfrak{P}}{\Lambda} \quad \text{etc.}$$

Tum vero erit

$$\Lambda = e^{\int \Omega dx} \quad \text{et} \quad \Pi = \int L \Lambda dx ,$$

quod integrale ita capi debet, ut evanescat posito $x = a$. Praeterea vero omnes constantes per integrationem ingredientes ita definiri oportet, ut omnibus circumstantiis satisfiat, hoc est, ut sumto $x = 0$ fiat etiam $y = 0$; deinde vero, ut sumto $x = a$ fiat $y = BC = b$. Praeterea etiam quantitati v pro casu $x = 0$ certus valor datus tribui debebit.

Applicatio ad Brachystochronas in medio resistente

16. Cum tempus descensus per arcum AY sit $\int \frac{ds}{v}$, ob $ds = dx\sqrt{1+pp}$ formula integralis a termino A, ubi $x = 0$, usque ad terminum C, ubi $x = a$ et $y = b$, extensa et ad minimum reducenda erit

$$\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} \quad \text{ideoque} \quad V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v} ,$$

quae formula cum duas tantum variabiles v et p contineat, erit

$$L = -\frac{\sqrt{1+pp}}{vv}, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \text{at} \quad P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}.$$

Deinde cum sit

$$dv = \frac{gdx - hv^{n+1}dx\sqrt{1+pp}}{v},$$

erit $\mathfrak{B} = \frac{g}{v} - hv^n\sqrt{1+pp}$; unde porro fit

$$\mathfrak{L} = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0, \quad \text{at} \quad \mathfrak{P} = -\frac{hv^n p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Ex his iam valoribus primo erit $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L}dx$; deinde vero fit $\Pi = \int L\Lambda dx$.

17. His inventis erit primo $N' = 0$, $P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}$; quocirca aequatio pro curva quaesita erit

$$N' - \frac{dP'}{dx} = 0 \quad \text{sive} \quad \frac{dP'}{dx} = 0,$$

unde statim integrando obtinetur $P' = C$; substitutis ergo valoribus pro P et $\mathfrak{P}$ oritur ista aequatio pro curva:

$$\frac{p}{v\sqrt{1+pp}} + \frac{h\Pi v^n p}{\Lambda\sqrt{1+pp}} = C.$$

Ex hac aequatione statim eliciamus valorem Π, quippe pro quo formulam integralem dedimus, eritque

$$\Pi = \frac{C\Lambda v\sqrt{1+pp} - \Lambda p}{h p v^{n+1}}.$$

Ponamus hic brevitatis gratia

$$\frac{C}{v^n}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{1}{v^{n+1}} = \Theta,$$

ut sit $\Pi = \frac{\Lambda\Theta}{h}$, atque ob $d\Lambda = \Lambda\mathfrak{L}dx$ erit:

$$d\Pi = L\Lambda dx = \frac{\Theta\Lambda\mathfrak{L}dx}{h} + \frac{\Lambda d\Theta}{h},$$

quae aequatio per Λ divisa erit $hLdx = \Theta\mathfrak{L}dx + d\Theta$. Est vero

$$d\Theta = -\frac{nCdv}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{C}{v^n}\cdot d\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{(n+1)dv}{v^{n+2}};$$

unde aequatio nostra erit:

$$-\frac{hdx\sqrt{1+pp}}{vv} = \frac{C\Omega dx}{v^n}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{\Omega dx}{v^{n+1}} - \frac{nCdv}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}$$
$$+\frac{(n+1)dv}{v^{n+2}} + \frac{C}{v^n}\cdot d\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}$$

existente $\Omega = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}$.

18. Haec iam aequatio a formulis integralibus liberata continet adhuc tres variabiles, scilicet p et v cum differentiali dx, ex eaque elementum dx facile expelli potest. Cum enim sit

$$vdv = gdx - hv^{n+1}dx\sqrt{1+pp},$$

erit

$$dx = \frac{vdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}},$$

qui valor si substituatur, obtinebitur aequatio tantum duas variabiles v et p continens. Hunc in finem in nostra aequatione omnes terminos elementum dx continentes ad eandem partem constituamus, eritque:

$$\frac{\Omega dx}{v^{n+1}} - \frac{dx\sqrt{1+pp}}{vv}\left(h + \frac{C\Omega}{pv^{n-2}}\right) = \frac{(n+1)dv}{v^{n+2}} - \frac{nCdv}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{C}{v^n}\cdot d\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}.$$

Quodsi vellemus loco dx et Ω valores substituere, prodiret aequatio valde perplexa, quam superfluum foret hic apponere. Interim tamen evidens est aequationem inter p et v differentialem primi gradus futuram; unde in negotio tam arduo eius resolutionem tanquam concessam iure postulare possumus.

19. Cum igitur per istam aequationem quantitas p per v detur atque ob integrationem nova quantitas constans ingrediatur, reliqua omnia, quae ad solutionem pertinent, facile expedire licebit. Primo enim, cum $\sqrt{1+pp}$ certa sit functio ipsius v, etiam quantitatem x per v definire licebit ope aequationis

$$dx = \frac{vdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}},$$

unde iterum nova constans introducetur, quam ita definiri oportet, ut sumto $v = 0$ fiat $x = 0$. Deinde vero etiam $\int \Omega dx$ per solam v determinabitur hincque porro ipse litterae Π valor ex aequatione

$$\Pi = \frac{CAv\sqrt{1+pp} - Ap}{hpv^{n+1}};$$

ubi constans C ita determinari debet, ut posito $x = a$ iste valor evanescat, quod ergo, si sumamus casu $x = a$ fieri $v = C$, hoc casu fieri debebit; sicque omnibus constantibus rite definitis ipsa curvae constructio nulla amplius laborat difficultate. Cum enim iam x et p dentur per v, ob $y = \int p dx$ etiam applicata y per v assignari poterit, atque in tam sublimi investigatione his determinationibus acquiescere debemus, quatenus scilicet solutio generalis, quae ad omnes valores exponentis n pateat, desideratur.

Supplementum, in quo natura Brachystochronarum in medio resistente accuratius determinatur

20. Etsi ultima aequatio differentialis inter binas variabiles p et v, ad quam nos methodus Maximorum et Minimorum perduxit, ita videbatur complexa, ut vix quicquam inde ad indolem harum curvarum cognoscendam concludi posse videretur, tamen calculo rite instituto sequens aequatio satis commoda prodiit:

$$0 = \frac{(n+2)dv}{vv} - \frac{(n+1)Cdv\sqrt{1+pp}}{pv} + C\left(1 - \frac{h}{g}v^{n+1}\sqrt{1+pp}\right)d\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p},$$

quae tantum ex quatuor terminis constat atque haud difficulter ad formam simpliciorem redigi potest.

21. Statuamus enim primo $C = \frac{1}{c}$ et $\frac{\sqrt{1+pp}}{p} = t$, unde fit

$$p = \frac{1}{\sqrt{tt-1}} \quad \text{et} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{t}{\sqrt{tt-1}},$$

quibus valoribus substitutis oritur ista aequatio:

$$\frac{(n+2)cdv}{vv} - \frac{(n+1)tdv}{v} + dt - \frac{h}{g}\cdot\frac{v^{n+1}tdt}{\sqrt{tt-1}} = 0.$$

Ubi statim patet binos terminos medios $dt - \frac{(n+1)tdv}{v}$ reddi integrabiles, si dividantur per v^{n+1}, quippe cum integrale prodeat $= \frac{t}{v^{n+1}}$. Tum autem terminus prior et postremus sponte integrationem admittent, ita ut integrale completum huius aequationis fiat:

$$\frac{t}{v^{n+1}} - \frac{c}{v^{n+2}} - \frac{h}{g}\sqrt{tt-1} = \Delta,$$

quae aequatio restitutis valoribus $t = \frac{\sqrt{1+pp}}{p}$ et $\sqrt{tt-1} = \frac{1}{p}$ multiplicando per v^{n+1} induet hanc formam:

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} - \frac{h}{g} \cdot \frac{v^{n+1}}{p} = \Delta v^{n+1} ,$$

unde ergo valor ipsius p per v sola extractione radicis quadratae definitur.

22. Hic autem ante omnia notasse iuvabit constantem Δ ex loco ultimi puncti C, ubi descensus terminatur, definiri. Cum enim in hoc termino debeat esse $\Pi = 0$ atque methodus Maximorum et Minimorum immediate suppeditasset hanc aequationem: $P - \frac{\Pi \mathfrak{P}}{\Delta} = C$, evidens est quantitatem Π evanescere non posse, nisi in eo loco, ubi fit $P = C$. Erat autem $P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}$, et quia nunc posuimus $C = \frac{1}{c}$, hoc eveniet, ubi fit $c = \frac{v\sqrt{1+pp}}{p}$. Hoc autem casu nostra aequatio inventa praebebit valorem $\Delta = -\frac{h}{gp}$, ubi p exprimit tangentem anguli, quo curva a situ verticali declinat; quamobrem, si velimus, ut ista inclinatio in puncto C dato angulo α aequetur, cuius tangens sit $= \theta$, erit $\Delta = -\frac{h}{g\theta}$, quo ergo valore substituto aequatio nostra penitus erit determinata fietque

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} + \frac{h}{g} v^{n+1} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

sive

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g} v^{n+1} \left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0 .$$

Haec autem determinatio puncti extremi C per datam declinationem curvae a situ verticali naturae rei multo magis videtur accomodata, quam si hoc punctum per abscissam $x = a$ et $y = b$ definire vellemus.

23. Quoniam igitur quantitas p per hanc aequationem functioni adeo algebraicae ipsius v aequatur, hinc constructio curvae satis commode institui poterit. Cum enim sit

$$dx = \frac{vdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}} , \quad \text{erit} \quad dy = \frac{pvdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$$

et utraque formula ita integrari debet, ut posito $v = 0$, id quod in ipso initio A evenit, integralia evanescant, hocque modo obtinebuntur ambae coordi-

natae x et y pro eo curvae puncto, ubi celeritas corporis est v. Erit scilicet

$$x = \int \frac{vdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{pvdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$$

haeque curva eo usque continuata, ubi fit $p = \theta$, erit vera Brachystochrona, super qua corpus brevissimo tempore ex A ad C descendit.

Evolutio casus, quo $h = 0$
sive resistentia evanescens

24. Hoc igitur casu nostra aequatio in hanc simplicissimam formam contrahitur:

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} = 0 ,$$

cui respondet aequatio $P - C = 0$; unde patet quodlibet curvae punctum Y pro ultimo termino assumi posse, ita ut huius curvae omnes portiones, ab initio A incipientes, Brachystochronismi proprietate gaudeant, quae, uti constat, est insignis proprietas Brachystochronae iam pridem pro vacuo inventae.

25. Cum igitur hic sit $h = 0$, erit $p = \frac{v}{\sqrt{cc - vv}}$ et ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \int \frac{vdv}{g} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{vvdv}{g\sqrt{cc - vv}} .$$

Inde igitur erit $x = \frac{vv}{2g}$, unde vicissim $v = \sqrt{2gx}$, qui valor in altera formula substitutus dat

$$y = \int \frac{dx\sqrt{2gx}}{\sqrt{cc - 2gx}} ,$$

quae aequatio manifesto est pro Cycloide, cuius cuspis in ipsum initium A incidit et revolutione circuli super recta horizontali describitur.

Evolutio casus, quo $n = -1$
sive resistentia ubique eadem

26. Hoc ergo casu aequatio nostra inter p et v hanc induet formam:

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g}\left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0 ,$$

ex qua aequatione elicitur

$$v = \frac{cp}{\sqrt{1+pp} + \frac{h}{g}\left(\frac{p}{\theta} - 1\right)} .$$

Unde sumto $p = \theta$ celeritas in termino ultimo C erit $v = \frac{c\theta}{\sqrt{1+\theta\theta}}$. Coordinatae autem nunc per v ita exprimuntur, ut sit

$$x = \int \frac{vdv}{g - h\sqrt{1+pp}} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{pvdv}{g - h\sqrt{1+pp}} ,$$

quae, si loco v valor inventus substituatur, per p expressae reperientur. Superfluum autem foret hanc operationem instituere.

27. Haec ergo curva erit Brachystochrona in medio, cuius resistentia est constans neque a celeritate pendens, seu, quomodo NEWTONUS talem resistentiam describit, ea est momentis temporum proportionalis.

CONCLUSIO

28. Si aequationem inter p et v hic inventam accuratius perpendamus, deprehendemus eam multo latius extendi posse, ut non solum resistentia certae potestati celeritatis v sit proportionalis, sed adeo rationem functionis cuiuscunque ipsius v sequatur, ita ut, sumto V pro ista functione celeritatis v, pro motu corporis hanc habeamus aequationem:

$$vdv = gdx - hVdx\sqrt{1+pp} .$$

Quia enim in nostra aequatione integrali exponens n non nisi in exponente ipsius v occurrit, hinc tuto concludere licet nil aliud opus esse, nisi ut in nostris formulis loco v^{n+1} scribatur V. Hoc igitur modo aequatio inter p et v nunc ita se habebit:

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g} V\left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0 .$$

Unde cum sit

$$dx = \frac{vdv}{g - h\sqrt{1+pp}} , \quad \text{erit} \quad dy = \frac{pvdv}{g - h\sqrt{1+pp}}$$

et reliqua omnia eodem modo determinabuntur ut ante.

DE BRACHYSTOCHRONA IN MEDIO RESISTENTE DUM CORPUS AD CENTRUM VIRIUM UTCUNQUE ATTRAHITUR

Commentatio 761 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St-Pétersbourg 8 (1817/8), 1822, p. 41—45
Conventui exhibuit die 20. Novembris 1780

1. Sit O centrum virium, cuius attractio ad distantiam $= x$ sit X, functio quaecunque ipsius x; tum vero, si corporis celeritas fuerit $= v$, sit vis resistens motui contraria $= V$, functio quaecunque ipsius v. Sit iam curva AXC Brachystochrona quaesita, super qua corpus descendens tempore brevissimo ab A ad C perveniat, siquidem descensus in A ex quiete inceperit. Verum nihil obstat, quominus ipsi in A iam certa celeritas tribuatur. Pro initio huius curvae A ponatur distantia $OA = a$ et pro fine C distantia $OC = c$ angulusque $AOC = b$. At vero pro eius puncto quocunque X ponatur eius distantia $OX = x$ et angulus $AOX = y$; atque manifestum est per relationem inter x et y curvam aeque determinari ac per aequationem inter coordinatas orthogonales. Ponatur autem arcus $AX = s$ eiusque elementum $Xx = ds$, et ducta recta Ox ductoque ex x ad OX perpendiculo xy erit $Xy = -dx$ et ob angulum $XOx = dy$ erit $xy = xdy$, unde fit elementum

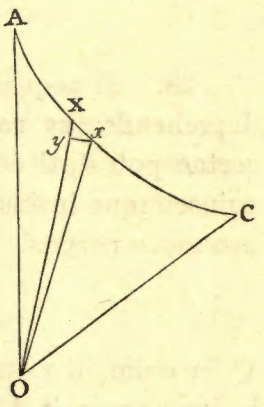


Fig. 1

$$Xx = ds = \sqrt{dx^2 + xxdy^2}\ ;$$

hinc si ponamus $dy = pdx$, erit $ds = -dx\sqrt{1 + ppxx}$.

2. Cum nunc corpus in X sollicitetur in directione XO vi $= X$, hinc pro directione motus Xx orietur vis $X \cdot \frac{Xy}{Xx} = -\frac{Xdx}{ds}$; vis autem resistentiae posita celeritate corporis in $X = v$ est $= V$, unde corpus accelerabitur a vi $= -\frac{Xdx}{ds} - V$, quae ducta in elementum spatii ds dabit incrementum

quadrati celeritatis, unde ergo erit $vdv = -Xdx - Vds$ hincque ob $ds = -dx\sqrt{1 + ppxx}$ fiet

$$vdv = dx(V\sqrt{1 + ppxx} - X) ,$$

quae aequatio exprimit relationem inter celeritatem v et quantitates proprie ad curvam pertinentes. Cum igitur tempusculum per $Xx = ds$ sit $\frac{ds}{v} = -\frac{dx\sqrt{1 + ppxx}}{v}$, inter omnes curvas ab A ad C ducendas ea quaeritur, pro qua fiat valor huius formulae integralis $\int \frac{dx\sqrt{1 + ppxx}}{v}$ omnium minimus.

3. Hic ante omnia observasse iuvabit, si terminus C in ipsa recta AO accipiatur, Brachystochronam in hanc ipsam rectam incidere debere, pro cuius ergo motu ob $y = 0$ ideoque etiam $p = 0$ enascitur ista aequatio: $vdv = dx(V - X)$, quae quia in genere neutiquam resolvi potest, multo minus postulari poterit, ut in genere pro Brachystochrona AC motus determinatio penitus evolvatur, sed praeclare nobiscum agi censendum erit, simodo aequationem differentialem inter ternas variabiles x, y, v eruere valuerimus, quippe qua, cum formula:

$$vdv = dx(V\sqrt{1 + ppxx} - X)$$

coniuncta, in se possibile esse intelligitur celeritatem v eliminari ideoque aequationem inter binas variabiles x et y obtineri posse.

4. Cum igitur inter omnes curvas AG ea quaeri debeat, pro qua valor huius formulae integralis $\int \frac{dx\sqrt{1 + ppxx}}{v}$ sit minimus, recurrendum erit ad problema generale isoperimetricum in praecedente dissertatione solutum. At quia hic circumstantiae non nihil sunt variatae, consultum erit solutionem ibi inventam sub forma theorematis huc transferre, quod ita si habebit:

THEOREMA ISOPERIMETRICUM GENERALE

5. *Si inter omnes curvas, quae a puncto A ad C duci possunt, ea quaeratur, in qua valor formulae integralis* $\int Wdx$ *sit maximus vel minimus, ubi W praeter binas variabiles x et y earumque differentialia* $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ *etc. insuper involvat variabilem v, ita ut sit*

$$dW = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + etc. ,$$

tum vero quantitas v ita per aequationem differentialem detur, ut posito $dv = \mathfrak{W}\,dx$ sit

$$d\mathfrak{W} = \mathfrak{L}\,dv + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + etc.\ ,$$

his positis quaeratur $\Lambda = e^{\int \mathfrak{Q}\,dx}$ hincque porro quantitas $\Pi = \int L\Lambda\,dx$, quod integrale ita capiatur, ut pro termino C evanescat seu, quod eodem redit, terminus iste C ibi statuatur, ubi fit $\Pi = 0$, quibus inventis sumatur

$$N' = N - \frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda}, \quad P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}, \quad Q' = Q - \frac{\Pi\mathfrak{Q}}{\Lambda} \quad etc.\ ,$$

ex his pro natura curvae quaesitae ista deducitur aequatio:

$$0 = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + etc.\ ,$$

ubi elementum dx sumtum est constans.

6. Pro nostro igitur casu est

$$W = \frac{\sqrt{1+ppxx}}{v} \quad \text{et} \quad \mathfrak{W} = \frac{V\sqrt{1+ppxx} - X}{v}\ ,$$

quae formulae tantum tres variabiles involvunt, scilicet v, x et p; et quoniam litterae M et $\mathfrak{M}$ in aequationem finalem non ingrediuntur, eas etiam evolvere non est opus. Hinc ex priore formula erit

$$L = -\frac{\sqrt{1+ppxx}}{vv}, \quad N = 0\ , \quad P = \frac{pxx}{v\sqrt{1+ppxx}}\ .$$

Ex altera vero formula fit:

$$\mathfrak{L} = -\frac{V\sqrt{1+ppxx} - X}{vv} + \frac{V'\sqrt{1+ppxx}}{v}\ ,$$

posito scilicet $dV = V'dv$; tum vero erit

$$\mathfrak{N} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{P} = \frac{Vpxx}{v\sqrt{1+ppxx}}\ ,$$

quibus inventis nostra aequatio finalis erit $\frac{dP'}{dx} = 0$ ideoque $P' = C$, hoc est $C = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}$. Unde patet quantitatem Π evanescere, ubi fit $P = C$. Quare terminus Brachystochronae C ibi constitui debet, ubi fit $\frac{pxx}{v\sqrt{1+ppxx}} = C$.

7. Cum nunc sit $\Lambda = e^{\int \Omega dx}$, erit $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \Omega dx$, ergo $d\Lambda = \Lambda \Omega dx$. Hinc autem porro habebimus $\Pi = \int L \Lambda dx$. Quare, cum ex aequatione finali fiat

$$\Pi = \frac{\Lambda P}{\mathfrak{P}} - \frac{C\Lambda}{\mathfrak{P}}, \quad \text{hoc est} \quad \Pi = \frac{\Lambda}{V} - \frac{C\Lambda v\sqrt{1+ppxx}}{Vpxx},$$

statuamus brevitatis gratia

$$\sqrt{1+ppxx} = \omega \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1+ppxx}}{pxx} = t,$$

ita ut sit

$$t = \frac{\omega}{x\sqrt{\omega\omega - 1}}.$$

Differentiemus nunc aequationem inventam, et cum sit $d\Pi = L\Lambda dx$ et $d\Lambda = \Lambda \Omega dx$, facta hac substitutione tota aequatio per Λ dividi poterit ideoque non opus erat eius valorem integralem determinare. Nunc ergo pro L et Ω valores inventos substituendo pervenietur ad hanc aequationem:

$$0 = \frac{\omega dx}{vv} + \frac{\Omega dx}{V} - \frac{dV}{VV} - \frac{C\Omega tv dx}{V} - C \cdot \frac{(vdt + tdv)}{V} + \frac{Ctv dV}{VV},$$

ubi est

$$\Omega = -\frac{V\omega - X}{vv} + \frac{V'\omega}{v}.$$

8. Nunc, cum sit $vdv = dx(V\omega - X)$, erit $dx = \frac{vdv}{V\omega - X}$, quem valorem in nostra aequatione loco dx substituamus, scilicet pro dx ubique scribamus vdv, reliquos vero terminos multiplicemus per $V\omega - X$ et loco $V'dv$ scribamus dV, quo facto aequatio sequentem induet formam:

$$0 = \frac{\omega dv}{v} + \frac{\omega dV}{V} - \frac{Cv\omega t dV}{V} + \frac{V\omega - X}{VV}\left(Cvt dV - CVvdt - dV - \frac{Vdv}{v}\right).$$

9. Quia haec aequatio non parum est complexa, primo eos tantum terminos evolvamus, in quibus non inest constans C, iique reperientur

$$\frac{\omega dv}{v} + \frac{\omega dV}{V} - \frac{\omega dV}{V} + \frac{XdV}{VV} - \frac{\omega dv}{v} + \frac{Xdv}{Vv} \quad \text{sive} \quad \frac{X}{V}\left(\frac{dV}{V} + \frac{dv}{v}\right).$$

At vero termini constantem C continentes erunt

$$-\frac{Cv\omega tdV}{V} - Cv\omega dt + \frac{Cv\omega tdV}{V} + \frac{CXvdt}{V} - \frac{CXtvdV}{VV}$$

sive deletis terminis se destruentibus

$$-\frac{CvtXdV}{VV} + \frac{CvXdt}{V} - Cv\omega dt ,$$

quocirca tota aequatio ita se habebit:

$$\frac{X}{V}\left(\frac{dV}{V} + \frac{dv}{v}\right) - Cv\omega dt + \frac{CvXdt}{V} - \frac{CvtXdV}{VV} = 0 .$$

10. Quodsi iam haec aequatio dividatur per CvX, prodibit haec forma:

$$\frac{1}{CVv}\, d \cdot lVv - \frac{\omega dt}{X} + \frac{dt}{V} - \frac{tdV}{VV} = 0 ,$$

cuius aequationis tam primum membrum quam duo postrema integrationem admittunt. Sumto igitur integrali erit

$$-\frac{1}{CVv} + \frac{t}{V} - \int\frac{\omega dt}{X} = \Delta ,$$

ubi in signo summatorio tantum binae variabiles p et x involvuntur, quia est

$$\omega = \sqrt{1 + ppxx} \quad \text{et} \quad t = \frac{\sqrt{1 + ppxx}}{pxx} ,$$

ac praeterea X functio ipsius x. Quamobrem per hanc aequationem tertia variabilis v cum sua functione data V determinari est censenda; quodsi hi valores in aequatione $vdv = dx(V\sqrt{1 + ppxx} - X)$ substituerentur, oriretur aequatio binas tantum variabiles x et p vel x et y involvens, qua ergo natura curvae Brachystochronae quaesitae exprimetur; neque quicquam ulterius pro solutione huius problematis postulari potest. Curva autem hac inventa terminus descensus C ibi statui debet, ubi fit, uti iam observavimus, $P = C$ seu ubi fit

$$C = \frac{pxx}{v\sqrt{1 + ppxx}} .$$

INDEX NOMINUM

QUAE SERIEI PRIMAE TOMIS 24 ET 25 CONTINENTUR

BERNOULLI, D., **24** 232, 271
25 81, 84, 85, 95

BERNOULLI, JAC., **24** 6, 9, 231, 235—237, 266
25 54, 141, 178

BERNOULLI, JOH., **24** 6, 231, 264
25 1, 12, 41, 141

BERNOULLII, **25** 14, 67, 84, 142

DIOPHANTEA (methodus) **25** 99, 110

EULER, JOH. ALBR., **25** 123

EULER, L., **24** 247 (*Commentationes* 59 et 122 *indicis* ENESTROEMIANI), 271 (*Comment.* 40), 286 (*Comment.* 84), 308 (*Comment.* 759)
25 20 (*Methodus inveniendi*), 41 (*Comment.* 1), 53 (*Comment.* 6), 54 (*Comment.* 27), 67 (*Comment.* 27), 81 (*Meth. inv.*), 206 (*Meth. inv.*), 208 (*Calc.integr.*), 219 (*Comment.* 391), 235 (*Meth. inv.*), 250 (*Comment.* 420), 270 (*Meth. inv.*), 314 (*Comment.* 42, *Mechanica*), 326 (*Mechanica*)

HERMANN, I., **25** 14, 41, 42, 43, 67, 84

HUYGENS, CHR., **25** 42—44, 47, 51

LAGRANGE, J. L., **25** 142, 179

NEWTON, I., **24** 185
25 337

TAYLOR, B., **25** 14, 67, 84