Die Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden in Leonhard Eulers Beiträgen zur Mechanik und Astronomie

Andreas Verdun

Zusammenfassung

Die Astronomie des 18. Jahrhunderts musste sich der Herausforderung stellen, immer genauere Beobachtungen durchführen, modellieren und auswerten zu können. Es mussten neue Theorien entwickelt oder bestehende verbessert werden, um den stetig steigenden Genauigkeitsanforderungen an Auswertung und theoretische Voraussagen genügen zu können. Neue physikalische Prinzipien und mathematische Methoden zur Modellierung und Auswertung wurden entdeckt und entwickelt. Leonhard EULER war mit seinen Beiträgen zur Mechanik und Astronomie maßgebend an dieser Entwicklung beteiligt, aus der moderne wissenschaftliche Methoden hervorgingen. Einige seiner Prinzipien und Methoden werden hier vorgestellt.

Einführung

Die Astronomie ist eine exakte, auf mathematischen und physikalischen Prinzipien beruhende Wissenschaft. Durch ihre Methoden, mit denen sie Positionen[1] von Himmelskörpern und Zeitpunkte von Finsternissen mit stetig wachsender Genauigkeit voraussagen konnte, erlangte sie hohes Ansehen. Steigende Beobachtungs-Genauigkeit verlangte nach verbesserten Theorien und umgekehrt. Diese Wechselwirkung zwischen Theorie und Beobachtung war für die Entwicklung der Astronomie, vor allem für die Positions-Astronomie, sehr bedeutsam.[2] Mitverantwortlich für die Verbesserung der Theorien waren 1. die Entdeckung einfacher physikalischer Gesetze (z. B. Trägheitsprinzip, Gravitationsgesetz, Impuls- und Drehimpuls-Gesetz), welche die Bewegungen der Himmelskörper bestimmen, 2. die immer genaueren Bestimmungen der astronomischen Konstanten,[3] die bei

---

[1] Unter der „Position“ eines Himmelskörpers versteht man seine sphärischen Koordinaten bzgl. eines bestimmten Bezugssystems. „Position“ und „Richtung“ (vom Koordinaten-Ursprung zum Himmelsobjekt) werden synonym verwendet.

[2] Cf. Verdun 2003a. Die *Positions-Astronomie* umfasst die Methoden zur Bestimmung der Positionen von Himmelskörpern (sog. *Astrometrie*) sowie die Methoden zur Beschreibung ihrer Bewegungen (sog. *Himmelsmechanik*).

[3] Z. B für Präzession, Nutation, Parallaxen, Aberrationen, atmosphärische Refraktion.

der Reduktion[4] astrometrischer (Richtungs-) Beobachtungen benötigt werden, und 3. die Entwicklung und Verbesserung statistisch korrekter Auswerte- und Parameterbestimmungs-Methoden. Spezielle mathematische Methoden, insbesondere die Infinitesimal-Rechnung und die Reihentheorie, förderten diese Entwicklung anfangs erheblich. Mit der Etablierung des LEIBNIZschen Kalküls – also der Infinitesimal-Rechnung in der von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ entwickelten Notation – durch die Brüder JACOB I und JOHANN I BERNOULLI, konnten himmelsmechanische Probleme in Form von Differentialgleichungen adäquat formuliert werden. Mit dem Ausbau der Theorie der unendlichen Reihen, insbesondere mit der Einführung trigonometrischer Reihen, konnten diese Differentialgleichungen zwar nur näherungsweise, aber effizient gelöst werden, was letztlich maßgebend zum Erfolg beitrug. Während sich die Beschreibung der Planetenbewegungen im 16. und 17. Jahrhundert auf rein geometrisch-kinematische Modelle beschränkte, konnten die Probleme der Positions-Astronomie mit Hilfe dieser mathematischen Methoden im 18. Jahrhundert *analytisch* behandelt werden. Diese „Mathematisierung der Astronomie" wurde vor allem durch die Leistungen von Leonhard EULER, Alexis Claude CLAIRAUT, Jean le Rond D'ALEMBERT, Joseph-Louis LAGRANGE und Pierre Simon de LAPLACE im 18. Jahrhundert entscheidend vorangetrieben. Ihre theoretischen Arbeiten erlaubten die Lösung zahlreicher Probleme der theoretischen und angewandten Astronomie (wie z.B. die Berechnung präziser Mond-Tafeln, die für genaue Ortsbestimmungen und für die Navigation benötigt wurden). Ihre Arbeiten bildeten die Grundlage für die weitere Entwicklung der Himmelsmechanik des 19. Jahrhunderts, die ihren Höhepunkt mit der Voraussage und Entdeckung des Planeten Neptun im Jahr 1846 vorübergehend erreichte.

Der Mathematiker, Physiker und Astronom Leonhard EULER trug entscheidend zu dieser Entwicklung bei und prägte die exakten Wissenschaften des 18. Jahrhunderts maßgebend.[5] Er entwickelte die mathematische Beschreibung der Natur in jener Form, wie sie heute noch im Wesentlichen

---

[4] Unter „Reduktion astrometrischer Beobachtungen" versteht man ein Verfahren, mit dem man die an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit gemessenen Positionen (Richtungen bzw. Winkel oder Winkeldifferenzen) derart „korrigiert", dass sie mit Beobachtungen, die an anderen Orten und zu anderen Zeiten gemacht wurden, verglichen werden können. Dazu müssen vor allem die lokalen Effekte (wie Refraktion, Parallaxen, Aberrationen), welche die Messungen beeinflussen, berücksichtigt werden. Bei der Reduktion der Messgrößen (z. B. Positionen) auf eine „Vergleichs-Epoche" müssen Präzession und/oder Nutation berücksichtigt werden.

[5] Cf. Fellmann 1995; Verdun 2003b.

gültig ist und z. T. sogar noch in seiner Notation verwendet wird. Zahlreiche mathematische Verfahren und physikalische Prinzipien wurden von EULER entdeckt oder durch ihn formalisiert. Fundamentale Begriffe wurden von ihm eingeführt und definiert. Er entdeckte mathematische Sätze und physikalische Gesetze, die grundlegend und richtungsweisend für alle weiteren Forschungen wurden. Die Tragweite seiner Leistungen kommt am besten durch die *analytischen Methoden* zum Ausdruck, mit denen er wissenschaftliche Probleme auf elegante Weise formulierte und in brillanter Manier löste. Es war nicht zuletzt dieser überaus klare *EULERsche Stil*, der diese Entwicklung wesentlich begünstigte und seinen Ideen und Beiträgen zum Durchbruch verhalf. Die folgende Auswahl einfacher und allgemeinverständlicher Beispiele aus EULERs Werken zur Mechanik und Astronomie sollen den Entstehungs-Prozess moderner wissenschaftlicher Methoden illustrieren.

Die Herausforderungen an die Astronomie des 18. Jahrhunderts und die Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden

Der Erfolg der theoretischen Astronomie scheint auf die Leistungen Isaac NEWTONs zurückzugehen. Häufig wird behauptet, dass die „NEWTONsche Wissenschaft“ als erstrebenswertes Vorbild sogar für andere Zweige der Wissenschaft gelte und dass NEWTONs Art und Weise, die physikalische Welt mathematisch zu modellieren, die gesamte Wissenschaft revolutioniert habe.[6] Es soll hier jedoch am Beispiel „EULER“ gezeigt werden, dass die Mathematisierung der Naturbeschreibung und die Transformation der exakten Wissenschaft des 17. Jahrhunderts in ihre mit modernen wissenschaftlichen Methoden arbeitende Form vorwiegend durch die theoretische Mechanik und Astronomie des 18. Jahrhunderts vollzogen wurde. Dieser Transformations-Prozess war äußerst komplex und war vermutlich sogar wesentlich komplizierter als der Übergang von der kinematischen zur dynamischen Himmelsmechanik, die mit der Entdeckung der universellen Gravitation und des Gravitationsgesetzes möglich wurde.[7] Einer der Gründe für diese Komplexität mag die Tatsache gewesen sein, dass neue, *allgemeine* physikalische Prinzipien und mathematische Methoden offenbar nur durch die Behandlung *spezieller* Probleme der Mechanik und Astronomie gewonnen werden konnten. Es waren vor allem die Basler Gelehrten JOHANN I und JACOB I BERNOULLI, DANIEL BERNOULLI, Jacob HERMANN und EULER, welche in ihren Arbeiten zur Mechanik, Himmelsme-

[6] Cf. Cohen 1980.
[7] Cf. Wilson 1989.

chanik, Analysis und Reihentheorie die analytische Behandlung der Probleme vorantrieben. Seit der Publikation von NEWTONS „Principia“[8] im Jahre 1687 mussten beinahe fünfzig Jahre vergehen, bis solche analytischen Methoden verfügbar wurden. Sie wurden von EULER, CLAIRAUT und D'ALEMBERT weiterentwickelt und angewandt, später dann von LAGRANGE und LAPLACE verfeinert und standardisiert. Sie entstanden aus der Notwendigkeit heraus, die anstehenden Probleme der Himmelsmechanik, der aufkommenden Geodäsie und der Navigation mit effizienten Methoden lösen und zugleich die mit diesen Disziplinen einhergehenden, stetig steigenden Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen. Steigende Beobachtungs-Genauigkeiten erforderten zur Auswertung verfeinerte Theorien und umgekehrt. Diese Entwicklung vollzog sich in der Astronomie des 18. Jahrhunderts besonders rasant und prägnant. Während physikalische Experimente auf der Erde fast ausnahmslos durch „Störeffekte“ wie Luftwiderstand oder Reibung dominiert werden, können die Theorien zur Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper im Prinzip mit uneingeschränkter Genauigkeit verifiziert werden, falls die Messungen mit hinreichender Präzision durchgeführt und mit adäquaten Modellen reduziert bzw. ausgewertet werden. Die Verbesserung dieser Modelle und Theorien sowie die Entwicklung statistisch korrekter Auswerte-Methoden stellten eine gewaltige Herausforderung für die Astronomie des 18. Jahrhunderts dar. Die neuen Beobachtungs- und Auswerte-Methoden entwickelten sich in der Folge zu Standardverfahren von erheblicher Bedeutung.

Drei wichtige Herausforderungen seien hier erwähnt, welche die astronomische Forschung des 18. Jahrhunderts richtungsweisend und nachhaltig beeinflussten und die letztlich für die Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden mitverantwortlich sind:

a) *Die Rezeption des NEWTONschen Gravitationsgesetzes und dessen zunehmende Akzeptanz auf Grund der damit erzielten Resultate bei der Anwendung auf Systeme von Massen-Punkten.*
   Die Herausforderung, die Folgen der universellen Gültigkeit des Gravitationsgesetzes konsequent zu berücksichtigen, führte zur Entwicklung von Störungstheorien und zu neuen analytischen Ansätzen, mit denen diese Theorien formuliert und mit neuen mathematischen Methoden gelöst werden konnten. An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Astronomie eine *mathematische*[9] Wissenschaft. Prominente Beispiele, die zur endgültigen Annahme des $1/r^2$-Gesetzes führten, sind

[8] Cf. Cohen et al. 1999.
[9] Im Sinne der durch Euler auf dem Funktionsbegriff begründeten Analysis.

die Forschungen über die Bewegung der Apsiden des Mondes,[10] die Studien über die Große Ungleichung von Jupiter und Saturn[11] sowie die Berechnungen zur Voraussage der Wiederkehr des Kometen Halley.[12]

b) *Das Studium der Bewegungen ausgedehnter, starrer Körper auf der Erde und im inertialen Raum als Folge der universellen Gravitation.* Die Herausforderung, die physikalischen Eigenschaften ausgedehnter, starrer Körper (insbesondere von Himmelskörpern inklusive die Erde) und ihre Rotations-Bewegungen mathematisch zu beschreiben, führte zu neuen Prinzipien der Mechanik. An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Astronomie eine *mechanische*[13] Wissenschaft. Prominente Beispiele sind die Studien zur Bewegung der Erdachse (Präzession, Nutation) und der Herleitung der Bewegungsgleichungen der Rotation starrer Körper[14] sowie die Entdeckung des Impuls- und Drehimpuls-Satzes.[15]

c) *Die Entwicklung von Methoden zur Parameterbestimmung und von statistischen Verfahren, um theoretische und empirische Resultate in möglichst gute Übereinstimmung zu bringen und um damit genaue astronomische Tafeln zu erstellen.*
Die Herausforderung, Positionen von Himmelsobjekten und Finsternisse oder Bedeckungen genau vorherzusagen sowie präzise Orts- und Zeitbestimmungen (z. B. auf See) durchführen zu können, setzte voraus, dass die Theorien stets von Neuem verifiziert und die darin verwendeten astronomischen Konstanten immer besser bestimmt werden konnten, indem die redundanten astrometrischen Beobachtungen statistisch korrekt reduziert wurden. An diesem Punkt und in diesem Zusammenhang wurde die Astronomie eine *statistische*[16] Wissenschaft. Prominente Beispiele sind die Konstruktion und Berechnung präziser Sonnen-, Mond- und Planeten-Tafeln, welche die gegenseitigen Störungen dieser Himmelskörper berücksichtigen, Kataloge von Sternpositio-

---

[10] Cf. Waff 1976, 1995a.
[11] Cf. Wilson 1985, 1995c.
[12] Cf. Waff, 1995b; Wilson 1995b. Dieser Komet ist nach dem englischen Astronomen Edmond Halley benannt, der entdeckte, dass Kometen periodische Umlaufszeiten haben können.
[13] Im Sinne der analytischen oder rationalen Mechanik, deren Begründung oft (zu Unrecht) mit Lagranges *Méchanique analitique* (cf. Lagrange 1788) in Verbindung gebracht wird.
[14] Cf. Wilson 1987, 1995a.
[15] Cf. Truesdell 1968.
[16] Im Sinne der Parameterbestimmungs- und Ausgleichsverfahren, die sich im wesentlichen auf die Methode der kleinsten Quadrate stützen.

nen, denen genaue astronomische Konstanten zu Grunde liegen sowie Refraktions-Tabellen, welche den Einfluss auf die Richtungs-Beobachtungen bestmöglich modellieren.[17] Die Bestimmungen der Sonnenparallaxe,[18] z. B. mit Hilfe der Venus-Durchgänge vor der Sonnenscheibe in den Jahren 1761 und 1769, hatten weitreichende Folgen von größter Bedeutung für die gesamte theoretische und angewandte Astronomie.

Die unternommenen Anstrengungen zur Bewältigung dieser Probleme führten zu dem, was wir heute als eine „wissenschaftliche Methode" bezeichnen: Beobachtungen werden mit mathematisch-physikalischen Gesetzen und Prinzipien modelliert und die Modelle durch statistisch korrektes Verarbeiten redundanter Beobachtungsdaten, einschließlich der Bestimmung von Modell-Parametern, empirisch verifiziert und verbessert.

EULERs Beiträge zur Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden

EULERs Beiträge zur Mechanik, sphärischen und „mechanischen" Astronomie (Himmelsmechanik)[19] haben die Entstehung moderner wissenschaftlicher Methoden nachhaltig beeinflusst. Es ist zwar meistens schwierig, die Wirkung auf die Wissenschaft des 18. Jahrhunderts in den Druckschriften nachzuweisen, unter anderem deshalb, weil das Zitieren und Referenzieren in Publikationen zu jener Zeit noch nicht üblich war. Aus dem immensen Briefwechsel EULERs kann aber geschlossen werden, dass intensive wechselseitige Anregungen zwischen EULER und seinen Zeitgenossen stattgefunden haben müssen, aus denen neue Ideen und Methoden entstanden sind. EULERs Werke wurden von der wissenschaftlichen Gemeinschaft seiner Zeit hoch geschätzt, nicht nur auf Grund ihrer Bedeutung, sondern auch wegen ihres unverkennbar klaren Stils, in denen sie verfasst wurden. EULERs gewichtiger Einfluss auf die Bildung naturwissenschaftlicher Methoden wird durch die Tatsache belegt, dass grundlegende Ideen zum ersten Mal in seinen Werken auftauchen, insbesondere seine *analytische* Beschreibung und Lösung mechanischer und astronomischer Probleme. Diese Tatsache soll im Folgenden anhand ausgewählter Beispiele illustriert und belegt werden. Sie stellen zentrale Bausteine dar, die – miteinander kombi-

---

[17] Cf. Wilson 1980; Forbes; Wilson 1995; Schmeidler; Sheynin 1995; Stigler 1986, pp. 11-61; Stigler 1999, pp. 302-319.

[18] Die Sonnenparallaxe ist jener Winkel, unter dem man den Äquatorradius der Erde vom Zentrum der Sonne aus sehen würde. Er beträgt rund 8.8 Bogensekunden.

[19] Nach Eulers „Astronomia mechanica" [E.834], die 1862 posthum erschienen ist. Der Begriff „Himmelsmechanik" oder „Mécanique céleste" scheint durch Laplace geprägt worden zu sein, dessen Hauptwerk den Titel *Traité de mécanique céleste* trägt (cf. Laplace 1799).

niert – Grundlage für leistungsfähige Methoden bilden, die heute noch in den exakten Wissenschaften verwendet werden.

Die Geschichte der Begriffe wie „Raum“, „Zeit“, „Masse“ und „Kraft“ ist wissenschaftshistorisch zwar wichtig. Da im Folgenden der Schwerpunkt jedoch auf der Bildung grundlegender *Methoden* liegt, können EULERS Beiträge zur Entwicklung dieser Begriffe nicht berücksichtigt werden. Eine Ausnahme bildet der Begriff des „Feldes“, der als physikalische Entität eigentlich erst im 20. Jahrhundert eingeführt wurde. Der Feld-Begriff wurde aber implizit bereits in den Theorien der Flüssigkeits-Mechanik und Hydrodynamik des 18. Jahrhunderts verwendet. Ein allgemeines „Vektorfeld“ erschien erstmals in CLAIRAUTS *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* von 1743.[20] D'ALEMBERT verwendete 1749 ein „Geschwindigkeits-Feld“ in seiner Hydrodynamik. EULER führte in seinen berühmten Abhandlungen über die Bewegung von Flüssigkeiten [E.225-7] von 1753/5 ein einfaches Feld-Modell ein, das er durch einen Satz von partiellen Differentialgleichungen definierte.[21] In der Astronomie kann der Feld-Begriff mit EULERS Gravitationstheorie in Verbindung gebracht werden.[22]

Parametrisierung, Bezugssysteme und Koordinaten-Transformation

Bei der Modellierung physikalischer Phänomene ist die Wahl geeigneter Bezugssysteme und Parameter oder Variablen zur adäquaten Definition der Probleme von entscheidender Bedeutung (sog. „Parametrisierung“). Eines der wichtigsten Bezugssysteme ist das inertiale, drei-dimensionale, orthogonale und rechts-orientierte (sog. „Cartesische“) Koordinatensystem. Ein solches System wurde erstmals 1728/29 von EULER in einer Abhandlung über geodätische Linien [E.9] (publiziert 1732) definiert und explizit als Bezugssystem für die analytische Beschreibung bestimmter Kurven eingeführt. Während EULER die Koordinaten-Achsen in dieser Arbeit noch nicht von einem gemeinsamen Ursprung ausgehend zeichnete, publizierte er sie in der uns gewohnten Darstellung im ersten Band seiner Schiffstheorie [E.110], die er bereits 1738 fertig stellte, die aber erst 1749 publiziert wurde. Bis in die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts bezogen sich Koordinaten-Angaben auf die geometrische Figur der betrachteten Körper oder der gegebenen Probleme (die sich übrigens ausschließlich auf zwei Dimensionen

[20] Cf. Clairaut 1743.
[21] Cf. Szabó 1987, S. 225-257.
[22] Siehe Abschnitt „Variationsrechnung, Gravitationstheorie und Prinzip der kleinsten Wirkung“ in diesem Beitrag.

beschränkten). Koordinaten wurden durch die Körper definiert bzw. waren mit diesen identisch, wodurch sich eine explizite Unterscheidung zwischen Bezugssystem und Körper scheinbar nicht aufdrängte. In seinen allgemeinen Untersuchungen über die Bewegungen der Himmelskörper [E.112], die am 8. Juni 1747 der Berliner Akademie präsentiert und 1749 publiziert wurden, bezog EULER die Variablen, welche die Bewegungen der Himmelskörper definieren, auf ein drei-dimensionales, rechtwinkliges Koordinaten-System, das weder von irgendeiner Körper-Figur noch von der durch das Problem induzierten Geometrie abhängt. Spätestens mit dieser Abhandlung schien sich, zumindest bei EULER, der Gebrauch von Körper- und Problem-unabhängigen Bezugssystemen definitiv durchgesetzt zu haben.

Mit dem Erkennen der Bedeutung von Bezugssystemen ging vermutlich eine Idee EULERs einher, die in der Folge für die formale Darstellung der analytischen Mechanik große Wichtigkeit erlangte: nämlich die Dekomposition von Kräften (und Beschleunigungen) in Komponenten parallel zu den drei Achsen des gewählten Bezugssystems.[23] In den Untersuchungen zur Bestimmung des Schwere-Zentrums eines Systems von Massen-Punkten, die EULER in seiner „Scientia navalis" [E.110] durchführte, wurde dieses Prinzip implizit verwendet. Er unterscheidet zwischen der Translations-Bewegung des Schwerpunktes und der Rotations-Bewegung um den Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten oder eines starren Körpers und zerlegt diese in Teilbewegungen um drei unabhängige, orthogonale Achsen, deren Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. EULER benutzt dieses Prinzip der Zerlegung von Kräften und Beschleunigungen in drei-dimensionale orthogonale Komponenten in seiner Abhandlung über die Bewegung der Mondknoten [E.138], die er der Berliner Akademie 1744 präsentierte, sowie in seinen berühmten „Recherches" [E.112] von 1747. In diesen beiden Abhandlungen leitet EULER für jede Koordinaten-Richtung eine Bewegungsgleichung her, indem er die resultierenden Beschleunigungen und Kräfte in die einzelnen Komponenten parallel zu den entsprechenden Achsen des Bezugssystems zerlegt. Diese Vorgehensweise etablierte sich zu einem Standard-Prozedere der theoretischen Physik und

[23] Die Darstellung von resultierenden Kräften aus einzelnen Kraft-Komponenten (sog. Kräfte-Parallelogramm) geht zwar bereits auf Pierre Varignon zurück, der dieses Prinzip auf zahlreiche Beispiele aus der Statik anwandte. Das Prinzip, nicht nur Kräfte, sondern auch Beschleunigungen in Komponenten zu zerlegen, die parallel zu den Achsen eines drei-dimensionalen Bezugssystems verlaufen, (ein Prinzip, das nota bene genau aus diesem Grund eingeführt wurde), scheint tatsächlich erst durch Euler aufgekommen zu sein.

Astronomie. Er kombiniert anschließend die Komponenten-Gleichungen derart, dass gewisse (unerwünschte) Terme eliminiert werden können, oder transformiert die Gleichungen in Polar-Koordinaten, um die resultierenden Gleichungen dann unabhängig voneinander algebraisch zu lösen.

Die Einführung von inertialen, dreidimensionalen, orthogonalen Bezugssystemen und ihre Auswirkungen auf die Komponenten-Darstellung von Kräften und Beschleunigungen in den Bewegungsgleichungen scheint in der Historiographie der Wissenschaft bisher noch nicht jene Beachtung gefunden zu haben, welche dieser Prozess eigentlich auf Grund seiner Bedeutung für die Entwicklung der modernen wissenschaftlichen Methoden verdienen würde.[24] Das Erscheinen von rotierenden Koordinatensystemen und dessen Folgen für die Mechanik und Astronomie wurde teilweise analysiert. Es wurde bereits erkannt, dass der Gebrauch von rotierenden Bezugssystemen in den 1740er und 1750er Jahren einen bedeutenden Teil der theoretischen Mechanik beeinflusst hat.[25]

Ein fest mit einem starren Körper verbundenes rotierendes Koordinatensystem wurde zum ersten Mal von CLAIRAUT in einer Abhandlung über Dynamik verwendet, die 1745 in den Mémoires der Pariser Akademie für das Jahr 1742 publiziert wurde.[26] EULER benutzt ein solches System implizit in seinem 1746 publizierten Essay [E.86] über die Bewegung von Körpern in sich bewegenden Oberflächen, insbesondere über die erzwungene Bewegung eines Körpers in einer sich um eine feste Achse drehenden Röhre. Er leitet die Bewegungsgleichungen bezüglich zweier fester, senkrecht aufeinander stehender Achsen her, die um ihren gemeinsamen Ursprung rotieren, indem er die Beschleunigungen auf diese Achsen projizierte und die Gleichungen in Polar-Koordinaten ausdrückt. Die Darstellung von Bewegungsgleichungen in Polar-Koordinaten wurde in der Folge zu einem Standard-Verfahren in Mechanik und Astronomie. EULER benutzte es bereits in Verbindung mit den Bahnelementen zur Beschreibung der Bewegung von Himmelskörpern in seinen „Recherches“ [E.112] von 1747 und etwas später in seiner ersten Mondtheorie [E.187] von 1753.

Das im Falle der sich drehenden Röhre in [E.86] verwendete rotierende Bezugssystem ist fest mit der Röhre verbunden und dadurch „automatisch“ gegeben, indem das Problem in Polar-Koordinaten ausgedrückt wird. EULER erkannte den Vorteil von körperfesten Koordinatensystemen noch

---

[24] Cf. Verdun 2003c.
[25] Cf. Meli 1993.
[26] Sur quelques principes qui donnent la solution d’un grand nombre de problèmes de dynamique (cf. Clairaut 1745).

nicht, als er die Rotation starrer Körper zu studieren begann. In seinem Mémoire über die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik [E.177], das EULER der Berliner Akademie am 3. September 1750 vorlegte, leitet er die Bewegungsgleichungen eines rotierenden Starr-Körpers bezüglich eines *inertialen* Bezugssystems her. Diese Gleichungen konnte er jedoch nicht lösen, da sie auf Grund der durch die Rotation des Körpers eingeführten Zeitabhängigkeit der Gleichungen für jeden Zeitpunkt hätten gelöst resp. ausgewertet werden müssen. Ein erster Versuch zur Lösung dieses Problems scheiterte. In einer weiteren Abhandlung [E.336], die EULER der Berliner Akademie am 7. Oktober 1751 präsentierte, verwendet er zwar ein körperfestes, mitrotierendes System, das er mit Hilfe von (später so genannten) *EULERschen Winkeln* auf das inertiale System bezieht. Die Gleichungen blieben aber weiterhin ungelöst. Der Durchbruch gelang EULER erst mit seiner Abhandlung [E.291], die er der Berliner Akademie am 6. Juli 1758 vorlegte und in der er die mechanischen Eigenschaften starrer Körper mathematisch charakterisieren konnte. Dazu verwendete er Begriffe wie „Trägheitsachsen“, „Trägheitsmomente“, „Hauptträgheitsachsen“ und „Hauptträgheitsmomente“, die er seit den 1730er Jahren einführte und sukzessive präzisierte. Das Problem der Starrkörper-Rotation ließ sich mit diesen Begriffen relativ einfach lösen. Als Resultat erhielt EULER die heute nach ihm benannten *EULERschen Bewegungs-Gleichungen für die Rotation starrer Körper*. Der entscheidende Punkt bei ihrer Herleitung ist die Verwendung eines körperfesten, mitrotierenden Koordinatensystems, das nicht durch die geometrische Form des Körpers definiert ist, sondern von den durch die Massen-Verteilung innerhalb des Körpers bestimmten Trägheitsmomenten abhängt. Es ist dies ein Meilenstein in der Definition und im Gebrauch von Bezugssystemen.

Ein nicht körperfestes, rotierendes Koordinatensystem, das gezielt als *mit-rotierendes* Bezugssystem eingeführt wurde, findet sich erstmals explizit definiert in EULERs zweiten Mondtheorie [E.418] von 1772, die er am 20. Oktober 1768 der Petersburger Akademie vorlegte. Ein derartiges System benötigte er wiederum für die Berechnung seiner Planetentafeln [E.458] sowie in seiner Abhandlung über die Störungen der Erdbahn durch die Venus [E.425]. Die in diesen fundamentalen Arbeiten verwendeten Bezugssysteme rotieren mit der mittleren Bewegung der gestörten Himmelskörper. Die Bewegungsgleichungen wurden dadurch erheblich vereinfacht und die Störungen konnten in rasch konvergierende Reihen entwickelt werden. Das Konzept mitrotierender Bezugssysteme wurde in der Folge zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel für die Mondtheorien und allgemeinen Störungstheorien des 19. Jahrhunderts.

Der Gebrauch von rotierenden Koordinatensystemen hat zur Folge, dass Koordinaten transformiert werden müssen. Dazu haben sich die EULERschen Winkel als äußerst nützliche Variablen erwiesen. Sie erschienen zum ersten Mal im vierten Kapitel des Anhangs zu EULERs epochaler Einleitung in die Analysis des Unendlichen [E.102]. EULER benutzte diese Variablen wieder in [E.336] zur Definition eines rotierenden, körperfesten Koordinatensystems. Die Transformation von Koordinaten mittels EULERscher Winkel als Argumente wird heutzutage mit Rotations-Matrizen bewerkstelligt. Produkte von Drehmatrizen können als „Kurz-Schreibweise" interpretiert werden, mit denen das Formel-System der sphärischen Trigonometrie hergeleitet werden kann, das durch EULER, vermutlich im Zusammenhang mit seinen Studien zur Rotation von starren Körpern, in der heute bekannten Darstellung entwickelt und eingeführt wurde.[27]

Bewegungsgleichungen und die „ersten Prinzipien der Mechanik"

Zu den ersten und wichtigsten Schritten in der theoretischen Behandlung (himmels-) mechanischer Probleme gehört die Formulierung von *Bewegungsgleichungen.* In der theoretischen Physik und Astronomie gilt es heutzutage als eine Selbstverständlichkeit, Probleme mittels Bewegungsgleichungen zu beschreiben und zu lösen. Während der historischen Entwicklung, die zu diesem scheinbar einfachen, aber äußerst nützlichen Prinzip führte, mussten fundamentale physikalische Begriffe wie z. B. Raum (Bezugssystem), Zeit, Bewegung, Trägheit, Masse und Kraft definiert und für den mathematischen Gebrauch präzisiert werden. Diese Begriffe mussten zudem mittels mathematischer Gleichungen zueinander in Beziehung gebracht werden. Aus diesem Prozess resultierten die „ersten Prinzipien der Mechanik", worunter nichts Geringeres als der *Impulssatz*[28] und der

[27] Cf. Eulers Abhandlungen [E.214] und [E.215]. Sogar Eulers Wahl der Symbole für die Variablen (Großkreis-Strecken, Winkel, Ecken der sphärischen Dreiecke) hat sich bis heute erhalten.

[28] Sei $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor eines Massenpunktes m. Dann gilt (bei konstanter Masse m) mit dem Impuls $\boldsymbol{p} = m\, d\boldsymbol{r}/dt$ der *Impulssatz* (zweites Newtonsches Axiom): $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\frac{md\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{K}$, wobei $\boldsymbol{K}$ die auf m wirkende Kraft bezeichnet. Bei geschlossenen Systemen gilt der *Impulserhaltungssatz*, der besagt, dass der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i$ erhalten bleibt, $\boldsymbol{P} = \text{const.}$

Drehimpulssatz[29] zu verstehen sind. Diese Gesetze bilden häufig die Grundlage zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen. Erste verbale Formulierungen gehen auf NEWTON zurück, doch es war EULER, der diese Prinzipien mathematisch mit Hilfe des LEIBNIZschen Kalküls formulierte und sie durch seine Anwendungen etablierte.

In seinem zweibändigen Lehrbuch zur Mechanik [E.15, E.16], das zwischen 1730 und 1734 entstand und das ursprünglich als Einführung in die Himmelsmechanik gedacht war, legte EULER sein ehrgeiziges Programm einer rationalen Mechanik dar, die aus der Mechanik der Massenpunkte, der starren, flexiblen, elastischen, flüssigen und gasförmigen Körpern bestehen sollte. Bedeutende Beiträge zu diesen Gebieten stammen von ihm. Seine Forschungen zur Bewegung von Massenpunkten und starren Körpern war entscheidend für die weitere Entwicklung der Mechanik und Himmelsmechanik. Der erste Band enthält präzise Definitionen der Begriffe wie „Masse", „Massenpunkt" und „Trägheit". Zum ersten Mal werden hier „Kraft", „Geschwindigkeit", „Winkelgeschwindigkeit", „Beschleunigung" und „Winkelbeschleunigung" als *vektorielle* Größen betrachtet. Der Impulssatz wird in einer Dimension hergeleitet.[30] EULER erkannte aber bereits klar, dass dieser allein zur Behandlung mechanischer Probleme starrer Körper nicht ausreichte.

Was als die „NEWTONschen Bewegungsgleichungen" oder als das „NEWTONsche zweite Gesetz" bekannt werden und in die Wissenschaftsgeschichte eingehen sollte, wurde in der Tat nicht von NEWTON, sondern von EULER zum ersten Mal analytisch in allgemeinster Form in seinen „Recherches" [E.112] von 1747 statuiert. Aber erst im Jahre 1750 erkannte EULER, dass der Impulssatz *universal gültig* und nicht nur auf Massenpunkte, sondern auf *beliebige* Massenelemente *dm* eines endlichen Körpers oder einer Flüssigkeit anwendbar ist.

In einer der bedeutendsten Abhandlungen in der Geschichte der exakten Wissenschaften des 18. Jahrhunderts, nämlich im Mémoire über die Entdeckung eines neuen mechanischen Prinzips [E.177], das EULER der Berliner

---

[29] Sei $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ der Drehimpuls eines Massenpunktes m und $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{K}$ das auf m durch die äußere Kraft $\boldsymbol{K}$ erzeugte Drehmoment. Dann besagt der *Drehimpulssatz*, dass $\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D}$, wobei $\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{l}_i$ und $\boldsymbol{D} = \sum \boldsymbol{d}_i$. Bei abgeschlossenen Systemen gilt der *Drehimpulserhaltungssatz*: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{l}_{rel}$, wobei $\boldsymbol{r}_s$ den Ortsvektor des Schwerpunktes und $\boldsymbol{l}_{rel}$ den Drehimpuls der Relativbewegung bezeichnen. Der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}$ bleibt erhalten.

[30] Es ist bemerkenswert, dass Euler bei dieser Herleitung nicht bei Newton, sondern bei Galilei anknüpft. Newton wird in diesem Zusammenhang gar nicht erwähnt.

Akademie am 3. September 1750 präsentierte und das 1752 gedruckt wurde, deklariert er den Impulssatz als „erstes Prinzip der Mechanik“ und leitet aus diesem – unter impliziter Verwendung des D'ALEMBERTschen Prinzips – die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems her. EULER kommentiert die drei resultierenden Komponenten-Gleichungen mit den Worten:

> „Ce seront donc ces trois formules, qui contiennent les nouveaux principes de Mécanique, dont on a besoin pour déterminer le mouvement des corps solides […] Et il est évident que ces nouveaux principes sont suffisans pour tous les cas imaginables des mouvemens, dont les corps solides sont susceptibles.“

Diese Aussage belegt, dass EULER die resultierenden Gleichungen (die nichts anderes als den Drehimpulssatz darstellen) als neues Prinzip der Mechanik betrachtete, denn nur diese Gleichungen (und *nicht* der Impulssatz) vermögen die Rotationsbewegungen starrer Körper zu beschreiben. EULER war daher (wie wir heute wissen zu Recht) davon überzeugt, ein „neues Prinzip der Mechanik“ gefunden zu haben.[31] Er erkannte jedoch die Bedeutung und Tragweite seiner Gleichungen noch nicht, vermutlich deshalb, weil er sie nicht lösen und in eine „einfachere“ Form bringen konnte. Sogar die Herleitung der „einfachen“ Form in [E.292] im Jahre 1758 führte ihn nicht auf die endgültige physikalische Interpretation. Dies mag, vom heutigen Standpunkt aus betrachtet, verwundern. Es ist umso erstaunlicher, weil der Drehimpulssatz in EULERs früheren Publikationen mindestens an drei verschiedenen Stellen und in drei unterschiedlichen Formen explizit bereits auftritt: Zum ersten Mal in seiner Schiffstheorie [E.110], indem er die Begriffe „vis gyratoria“ (was als Winkelbeschleunigung zu verstehen ist) und „Trägheitsmoment“ für ein System von Massenpunkten definiert

[31] Das Verb „contenir“ kann in Eulers Aussage nicht nur im Sinne von „in sich halten, beinhalten = enthalten“, sondern auch im Sinne von „(um)fassen, begreifen = darstellen“ übersetzt werden. Das Wort allein lässt also die Interpretation offen, ob die drei resultierenden Gleichungen die neuen Prinzipien (Komponenten-Gleichungen des Impulssatzes) bloß *enthalten* oder ob sie neue Prinzipien (Komponenten-Gleichungen des Drehimpulssatzes) *darstellen*. Die Tatsache, dass Euler (zu Unrecht) glaubte, die Gleichungen aus dem Impulssatz hergeleitet zu haben, spricht für die erste Interpretation. Implizit verwendete er aber zusätzlich das d'Alembertsche Prinzip, wenn er in § 9 schreibt, dass innerhalb des Körpers „toutes ses forces centrifuges se détruisent mutuellement“. Der Kontext legt daher die zweite Interpretation nahe. Euler hat zwar erkannt, dass seine resultierenden Gleichungen allgemeiner sind als der Impulssatz und somit die von ihm gefundenen neuen Prinzipien darstellen (Cf. Wilson 1987, p. 263). (Diese Interpretation widerspricht der etablierten Ansicht gewisser Wissenschaftshistoriker, die Eulers „neu entdecktes Prinzip“ mit dem Impulssatz identifizieren.) Da er sie aber vermeintlich aus diesem herleitete, musste er annehmen, dass sie nicht unabhängig von diesem sind.

und zueinander in Beziehung setzt; zum zweiten Mal in einer Abhandlung über die Bewegung der Mondknoten [E.138], die er am 5. Oktober 1744 der Berliner Akademie vorstellte und in der er den Drehimpuls für ein diskretes System von Punktmassen so herleitet, wie es heute noch in jedem Lehrbuch der Mechanik dargestellt wird.[32] Und genau einen Monat, nachdem er dieses Mémoire präsentierte, stellte EULER der Berliner Akademie am 5. November 1744 eine weitere Abhandlung über die Bewegung flexibler Körper [E.174] vor, die aber nicht vor 1751 veröffentlicht wurde und in welcher der Drehimpulssatz ein drittes Mal auftaucht.[33] Darin leitet er Bewegungsgleichungen für starre Körper unter Benutzung des Drehimpulssatzes mit den Begriffen Drehmoment und Trägheitsmoment her. Es musste jedoch noch ein Vierteljahrhundert vergehen, ehe EULER im Drehimpulssatz ein *neues*, *unabhängiges* und *universal gültiges* Prinzip der Mechanik erkannte. Er verkündete diese „Entdeckung" am 16. Oktober 1775 der Petersburger Akademie in einer Abhandlung mit dem Titel „Neue Methode zur Bestimmung der Bewegung von starren Körpern" [E.479], die 1776 publiziert wurde.

Mit Hilfe seiner Bewegungsgleichungen für starre Körper studierte EULER die Bewegung der Rotationsachse der Erde bezüglich ihrer Achse des maximalen Trägheitsmomentes unter der Annahme, dass diese Achsen nicht kollinear sind [E.308 und E.289]. Ein wichtiges Resultat ist die Formel, mit der die Periode der sogenannten *EULERschen Nutation* oder Polschwankung bestimmt werden kann. Diese hängt von der dynamischen Abplattung der Erde ab. Sie wurde später *EULERsche Periode* bezeichnet und hatte einen eigenartigen paradigmatischen Einfluss auf die Positions-Astronomie des 19. Jahrhunderts, als man den empirischen Nachweis der Polschwankung erbringen wollte. Die Astronomen benutzten nämlich in ihren Modellen die EULERsche Periode als festen Parameter, anstatt diesen (zusammen mit vielen anderen Parametern) ebenfalls aus den Beobachtungen zu schätzen. Dieser Umstand verzögerte die Entdeckung der wahren

[32] Von diesem in Latein verfassten *Mémoire* wurde 1746 nur eine in französischer Sprache geschriebene Zusammenfassung publiziert, vermutlich deshalb, weil die Berliner Akademie in ihrer Schriften-Reihe strikt nur in Französisch publizierte. Dieser Umstand mag Euler veranlasst haben, seine Arbeit 1750 in den *Novi Commarii* zu veröffentlichen. In dieser Abhandlung leitete er den Drehimpulssatz für diskrete Systeme von Massenpunkten explizit aus dem Impulssatz her.

[33] Cf. Truesdell 1968, p. 256, „Conjecture 3".

Periode,[34] die durch die elastische Erde hervorgerufen wird, um ein halbes Jahrhundert.[35]

Variationsrechnung, Gravitationstheorie und Prinzip der kleinsten Wirkung

Der „Kraft-Term“ in den Bewegungsgleichungen ist in den meisten astronomischen Anwendungen identisch mit der aus dem Gesetz der universellen Gravitation folgenden Gravitationskraft bzw. der resultierenden Störkraft. Die Geschichte der allmählichen Anerkennung des Gravitationsgesetzes ist weitgehend bekannt. Die Gültigkeit des Gravitations-Gesetzes wurde sowohl durch die theoretische und empirische Bestimmung der Erdfigur[36] als auch durch die Bewegung der Apsidenlinie des Mondes[37] erwiesen. Die rasche Etablierung dieses Gesetzes war von großer Bedeutung, da es eines der fundamentalen Gesetze der Physik und Astronomie darstellt. EULER trug durch seine Arbeiten und Resultate zur Himmelsmechanik wesentlich zu diesem Etablierungs-Prozess bei. Seine Bemühungen um eine physikalische Begründung der Gravitation waren aber nicht unbestritten.

Stimuliert durch die aktuelle Forschung und durch den wissenschaftlichen Disput zwischen den Anhängern NEWTONS und DESCARTES’ über die wahre Figur der Erde, präsentierte EULER am 5. Mai 1738 ein Mémoire über die Anziehung eines sphärischen Körpers [E.97], das 1747 publiziert wurde. Darin bestätigt er NEWTONS Aussage, dass die Erde an den Polen abgeplattet sei und nicht, wie z. B. Jacques CASSINI behauptete,[38] am Äquator. EULER bestimmt die Gravitationskraft eines Rotations-Ellipsoids auf eine Partikel am Pol und am Äquator, indem er ein elliptisches Integral löst, das er in eine unendliche Reihe entwickelte. Dies war das erste Mal, dass ein derartiges Integral formuliert und approximativ gelöst wurde. Das Verhältnis zwischen Äquatorial- und Polar-Durchmesser der Erde berechnete EULER zu 234/233, was NEWTONS Abschätzung bestätigte.

In den 1740er Jahren entwickelten EULER, CLAIRAUT und D’ALEMBERT neue analytische Theorien der Mond-Bewegung auf Grundlage des Gravitationsgesetzes. Für die Bewegung der Apsidenlinien ergab sich jedoch ei-

[34] Die Eulersche Periode (für eine starre Erde) beträgt etwa 304 Tage. Die tatsächliche Periode (für eine elastische Erde) beträgt etwa 430 Tage. Diese wurde rein empirisch 1891 durch Seth Carlo Chandler gefunden.
[35] Cf. Verdun et al. 2000a.
[36] Cf. Greenberg 1995.
[37] Cf. Waff 1976, 1995a.
[38] *Traité de la grandeur et de la figure de la terre* (cf. Cassini 1720). Es handelt sich um das Resultat der vom Vater Giovanni Domenico Cassini begonnenen und unter seiner Direktion vollendeten Gradmessung von Dünkirchen bis zum Canigou.

ne Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung. In der Folge entbrannte eine heftige Diskussion über verschiedene Aspekte und mögliche Ursachen dieses Problems: 1. Wie waren die Kern-Aussagen in NEWTONS „Principia" zu interpretieren und zu verifizieren? 2. Konnten die vorgeschlagenen „Verbesserungen" allgemein angewandt werden? und 3. Waren ungenaue Berechnungen für die scheinbare Unstimmigkeit verantwortlich? EULER war einer der ersten, der die Gültigkeit des $1/r^2$-Gesetzes in Frage stellte. In seinen „Recherches" [E.112] von 1747 untersuchte er zwei verschiedene Gesetze, die vom $1/r^2$-Gesetz ein wenig abwichen: ein Gesetz, das einen zusätzlich Term proportional zur ν-ten Potenz des Abstandes r aufwies, wobei ν als sehr kleine Zahl angenommen wurde; und ein Gesetz, in dem sich die Kraft umgekehrt proportional zur (2+ν)ten Potenz des Abstand r ändert. Aber auch mit diesen Modifikationen gelang es EULER nicht, die Resultate aus diesen Annahmen in bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu bringen. Gegen Ende des Jahres 1748 gelang es CLAIRAUT, die beobachtete Apsidendrehung des Mondes in Einklang mit den aus einem $1/r^2$-Gesetz folgenden theoretischen Resultaten zu bringen, indem er alle relevanten Terme bei der Lösung der Bewegungsgleichungen mitberücksichtigte, die in der Reihenentwicklung auftraten.

EULERS anfängliche Zweifel an der exakten Gültigkeit eines $1/r^2$-Gesetzes waren vermutlich dadurch begründet, dass nach seiner Vorstellung die Wirkung aller Kräfte stets durch direkten Kontakt ausgeübt wird. Dies galt insbesondere auch für die Gravitationskräfte, denn für EULER existierte der leere Raum nicht. Er postulierte an seiner Stelle die Existenz eines allgegenwärtigen, extrem dünnen und feinen materiellen Kontinuums, das unter ständigem hohen Druck steht und das durch eine extrem hohe Elastizität und einer extrem niedrigen Dichte charakterisiert ist.[39] Dieses Medium dachte sich EULER als hydrodynamischen Äther, und er leitete den Gravitationseffekt aus dem Ätherdruck her.[40] Nach EULERS Theorie werden Körper aber nicht durch Stöße der Äther-Partikel vorangetrieben, denn die resultierende Kraft würde einerseits vom Äther-Druck abhängen, der als extrem niedrig angenommen wird, und andererseits vom Widerstand, den der Äther als Medium der Bewegung eines Körpers entgegensetzt. In einer Abhandlung [E.89], die 1746 publiziert wurde, schätzt EULER die Auswirkung eines vermeintlichen Äther-Widerstandes auf die

[39] Die Idee eines raumerfüllenden, subtilen und elastischen Mediums, mit dem die Ursache der Gravitation erklärt werden könnte, ist nicht neu. Man vergleiche z. B. die „Querries" 21 und 22 in Newtons Opticks von 1704 (4. Aufl. 1730).
[40] Cf. Verdun 2000b.

Bewegungen der Planeten ab und zeigt, dass dieser Effekt (zumindest für die Erde) äußerst gering ist. Dieses Resultat stimmt mit den Beobachtungen überein, aus denen man tatsächlich auf eine ungehinderte Bewegung der Himmelskörper durch den Raum schließen darf. EULER postuliert deshalb in seiner Preis-Schrift [E.109] für die Pariser Akademie für das Jahr 1748, die 1751 publiziert wurde, ein Ungleichgewicht des Äthers in der Nähe von Himmelskörpern, das sich in einer Veränderung des Äther-Druckes äußert, der umgekehrt proportional zur Entfernung r von den Zentren der Himmelskörper zunimmt. EULER konnte seine Theorie nie in eine endgültige Form bringen, vermutlich deshalb, weil er nicht erklären konnte, weshalb nach seiner Theorie der Äther-Druck im Raum extrem hoch ist, während er in der Nähe von massiven Körpern mit $1/r$ abnimmt. Trotzdem, EULERs Gravitations-Modell beruht auf einer Idee, die sich – in der Retrospektive – erst in einem neuen physikalischen Kontext als äußerst fruchtbar erweisen sollte. EULER ersetzte in seiner Theorie den leeren Raum implizit durch ein Äther-Kontinuum. Die Gravitation wurde in seinem Modell durch die lokale Struktur des Raumes, d. h. durch die von den massiven Körpern bestimmte Verteilung des Äther-Druckes, erklärt. Aus dieser Sicht kann EULERs Theorie als erster Versuch interpretiert werden, die Ursache der universellen Gravitation mit Hilfe einer „Feld-Theorie" zu beschreiben, wie wir heute sagen würden.

EULERs Forschungen zur Gravitation scheinen eng verbunden zu sein mit seiner Entdeckung des Prinzips der kleinsten Wirkung,[41] dessen Ursprung in der durch JOHANN I und JACOB I BERNOULLI geschaffenen Variations-Rechnung liegt. Variations-Rechnung und Extremal-Prinzipien entwickelten sich zu fundamentalen Bausteinen der analytischen Mechanik, wie sie in der Folge durch LAGRANGE, William Rowan HAMILTON und Carl Gustav Jacob JACOBI ausgearbeitet und vervollständigt wurden.[42] Es sind zentrale Methoden der modernen Physik.

EULER beschäftigte sich seit seinen ersten Publikationen mit Variations-Problemen, insbesondere mit sogenannten isoperimetrischen Problemen. Seine monumentale „Mechanica" sowie zahlreiche andere seiner Publikationen zeugen von seinem tiefem Interesse an Problemen, die mit der Bewegung von Partikeln in widerstehenden Medien in Zusammenhang stehen und die er mit Methoden der Variationsrechnung löste. In einem Mémoire [E.56], das EULER am 4. Oktober 1736 der Petersburger Akademie vorstellte und das 1741 veröffentlicht wurde, leitet er eine Gleichung her, die

[41] Cf. Pulte 1989, pp. 132ff., pp. 156f.
[42] Cf. Fraser 1997.

später unter dem Namen *EULER-LAGRANGE-Gleichung* bekannt wurde. EULERs Arbeiten zu diesem Thema kulminierten in seinem epochalen Werk über Variations-Rechnung („Methodus inveniendi", [E.65]), das er bereits im Frühling 1741 beendete, das aber erst 1744 gedruckt wurde. Während EULER die Variations-Rechnung anfänglich als rein mathematisches Thema auffasste, regte ihn sein Freund DANIEL BERNOULLI an, diese Methode auch auf mechanische und astronomischen (dynamische) Probleme anzuwenden. EULER bestimmte sodann die Kurvenform (sogenannte Elastica) eines völlig elastischen und homogen beschaffenen Seiles von konstanter gegebener Länge, das an seinen Enden mit einer vorgegebenen Neigung gegen die Horizontale befestigt ist. Die Lösung dieses mechanischen Problems erschien als erster Anhang zu seinem Buch über Variations-Rechnung. Unter Verwendung der LEIBNIZschen Definition des Begriffes „Aktion" leitete EULER des weiteren die Planetenbewegungen aus dem später so genannten *Prinzip der kleinsten Wirkung* her: Ein Himmelskörper der Masse m und gegebener Anfangs-Geschwindigkeit v wird sich genau in jener Trajektorie (von allen möglichen geschlossenen Bahnen) bewegen, die den Wert des Integral

$$\int mv^2 dt$$

minimal werden lässt. Die Lösung dieses astronomischen Problems ließ EULER als zweiter Anhang seiner „Methodus" folgen. Beide Supplemente waren bis 1743 fertiggestellt. EULER mag aus diesen Ergebnissen gefolgert haben, dass in der realen Natur ein vom Zentralkraft-Konzept grundsätzlich verschiedenes Prinzip wirksam sein muss, mit dem die Bewegungen und Trajektorien der Himmelskörper erklärt werden können. Planetenbewegungen könnten somit als *erzwungene* Bewegungen innerhalb des Äthers interpretiert werden, die durch das Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmt wären. Es wird sogar vermutet,[43] dass EULERs Entdeckung dieses Prinzips eine Folge seiner Suche nach der Ursache der Gravitation gewesen sein könnte. Das Prinzip der kleinsten Wirkung, z. B. in der Formulierung als EULER-LAGRANGE-Gleichung, sollte sich in der Folge nicht nur für die theoretische Physik, sondern für die gesamten Naturwissenschaften als eines der wichtigsten und fruchtbarsten überhaupt herausstellen.

[43] Cf. Pulte 1989.

Analytische und numerische Integrationsmethoden

Das Gesetz der universellen Gravitation impliziert, dass KEPLERS Gesetze der Planetenbewegung nur im Fall zweier sphärisch symmetrischer Körper exakt gültig ist, die sich im sonst leeren Raum gegenseitig anziehen. In allen anderen Fällen, wenn also mehr als zwei Körper gravitativ wechselwirken, sind alle gegenseitigen Anziehungen zu berücksichtigen. Die Gleichungen des sogenannten Zwei-Körper-Problems lassen sich in algebraisch geschlossener Form lösen. EULER behandelte das Zwei-Körper-Problem von Punktmassen bereits erschöpfend in seiner „Mechanica“ und studierte die Bewegungen von Partikeln, die von Zentralkräften angezogen werden (sogenannte KEPLER-Bewegungen). Die Resultate wurden für die (ersten) Bahnbestimmungen von Kometen und Planeten verwendet, aus denen Näherungswerte für die sogenannten oskulierenden Bahnelemente folgten.[44]

Die analytische Behandlung der gegenseitigen Störungen von Himmelskörpern auf Grund des Gravitationsgesetzes, die sogenannte *Störungstheorie*, gehörte zu einem der schwierigsten Probleme der Mathematiker des 18. Jahrhunderts. EULER verfasste zahlreiche Abhandlungen zu diesem Thema, wobei er jeweils die Beschleunigungen oder Störkräfte als gegeben betrachtete und ihre Auswirkungen auf die Bahnelemente der gestörten Körper studierte. Er versuchte als erster das allgemeine Störungsproblem, insbesondere das allgemeine Drei-Körper-Problem, analytisch zu lösen. Er fand Lösungen für Spezialfälle, die er „eingeschränkte Drei-Körper-Probleme“ nannte.[45] Es wurde jedoch schon bald klar, dass allgemeine Störungsprobleme am einfachsten durch Näherungen bewältigt werden können. Die schwierigste Hürde schien rein technischer Natur zu sein. Die Differentialgleichungen, welche die Komponenten der Beschleunigungen und Störkräfte zueinander in Beziehung setzen, konnten analytisch nicht exakt, sondern nur durch Approximationen integriert werden. Näherungslösungen analytischer Störungstheorien stützen sich auf die Integration trigonometrischer Reihen. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung trigonometrischer Funktionen vollzog sich aber wesentlich langsamer als die anderer bekannter transzendenter Funktionen wie z. B. der Logarithmus- oder der Exponential-Funktion. Es war EULER, der die trigonometrischen Funktionen im Sinne des Funktionsbegriffs einführte und trigonometrische Reihen als Näherungsfunktionen verwendete, die Term für Term einfach

[44] „Oskulierende“ Bahnelemente zu einem Zeitpunkt (Epoche) t sind solche, die ein Himmelskörper haben würde, wenn alle Störkräfte zum Zeitpunkt t „ausgeschaltet“ würden und diese Elemente somit aus dem Zwei-Körper-Problem zur Zeit t folgen.

[45] „problema restrictum“ oder „problème restreint“.

integriert werden können. Die Anwendung solcher Reihen setzt jedoch eine geeignete Methode voraus, mit der die Koeffizienten der Reihenterme näherungsweise berechnet werden können. Wiederum war es EULER, der erstmals Verfahren zur Lösung dieses Problems vorschlug. Die Infinitesimalrechnung trigonometrischer Funktionen präsentierte er in einem Mémoire [E.128] am 15. Dezember 1739 der Petersburger Akademie, das aber erst 1750 publiziert wurde. Er verwendete diese trigonometrischen Funktionen sodann in seiner Preis-Schrift von 1748 über die große Ungleichheit von Jupiter und Saturn [E.120], die 1749 publiziert wurde und in der er die Bewegungsgleichungen (ausgedrückt in Polar-Koordinaten und algebraisch umgeformt) in trigonometrische Reihen entwickelte in der Annahme, jeder Term sei dann sofort integrierbar. Dabei trat ein schwerwiegendes Problem auf: der Koeffizient eines jeden Terms bestand seinerseits aus einer unendlichen Reihe. Damit erschienen vermutlich zum ersten Mal die später so genannten *FOURIER-Koeffizienten.* EULER löste diese FOURIER-Integrale numerisch. Sein Lösungsansatz kann als eine Vorstufe der *FOURIER-Analyse* betrachtet werden, die sich im 19. Jahrhundert zu einer der wichtigsten Methoden der theoretischen Physik entwickeln sollte.

EULER behandelte die gegenseitigen Störungen auf eine neue und einfache Weise. Er bestimmte die resultierenden Störkräfte (zerlegt in drei orthogonale Komponenten) und untersuchte ihre Wirkungen auf die Bahnelemente direkt mit Hilfe der Differential-Gleichungen in diesen Bahnelementen. LAGRANGE verfeinerte später diese Methode, in dem er die sogenannte Störungsfunktion einführte und damit die nach ihm benannten Störungsgleichungen der Planetenbewegungen herleitete. Die Variation der Bahnelemente ist eine weitere Methode, die ebenfalls von EULER in seiner Abhandlung [E.120] zuerst entwickelt wurde. Die Strategien zur analytischen Lösung der Störungsgleichungen gehören in das Gebiet der sogenannten *allgemeinen Störungsrechnung.* Die Gleichungen werden durch trigonometrische Reihenentwicklungen approximiert und dann integriert. Vor dem Computer-Zeitalter stellte dieses Verfahren den effizientesten Lösungsansatz dar. Es gab aber bereits Algorithmen, mit denen diese Gleichungen numerisch gelöst werden konnten. Die numerische Integration ist die zentrale Methode der *speziellen Störungsrechnung.* Sämtliche heute verwendeten Methoden zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen (formuliert als sogenannte Anfangswert-Probleme) basieren letztlich auf einem Verfahren, das EULER Ende des Jahren 1759 formulierte, am 7. August 1766 der Petersburger Akademie präsentierte, und in § 650 seines Lehrbuches zur Integralrechnung [E.342] 1768 publizierte. Der EULERsche Algorithmus ist eines der einfachsten und robustesten Verfahren der numerischen Integration. Es wurde zur numerischen Approximation entwickelt, erwies sich aber auch für die reine Mathematik als sehr fruchtbar: Die Beweise der Existenz- und Eindeutigkeits-Theoreme von Lösungen zu Differentialgleichungen können damit erbracht werden.

Die erste groß angelegte numerische Integration führte CLAIRAUT durch, als er die für 1759 erwartete Rückkehr des HALLEYschen Kometen vorausberechnete.[46] Wegen der großen Exzentrizität der Kometenbahn konnte CLAIRAUT keine trigonometrischen Reihen verwenden, die in diesem Fall nur sehr langsam konvergieren würden, sondern musste auf eine von Ruggiero Giuseppe BOŠKOVIČ[47] im Jahre 1752 vorgeschlagene Methode der mechanischen Quadratur zurückgreifen. CLAIRAUT beendete und revidierte seine Berechnungen bis August 1759, vermutlich ohne die EULERsche Methode zu kennen. EULER hat seinen Algorithmus zur numerischen Integration nie angewandt, vermutlich des gewichtigen Nachteils dieser Methode wegen: die langsame Konvergenz hätte einen immensen Aufwand an Berechnungen zur Folge.

Datenauswertung und Parameterbestimmung

Die Anforderungen der Astronomie des 18. Jahrhunderts an die Auswertung von Beobachtungen führte zur Entwicklung von Methoden, die in der Folge zu einer eigenständigen Disziplinen von größter Wichtigkeit für die Wissenschaft werden sollte, nämlich zur Theorie der Ausgleichungs- und Schätzverfahren und der Fehlerrechnung. Diese Theorien entwickelten sich vorerst nur langsam, etablierten sich aber zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit der Methode der kleinsten Quadrate rasant zu Standard-Prozeduren, nachdem es Carl Friedrich GAUSS gelungen war, diese auf eine solide theoretische Grundlage zu stellen. Einige Elemente der Auswertung und Analyse von Beobachtungsdaten fanden aber bereits um die Mitte des 18. Jahrhunderts Einzug in die Astronomie. Die Methoden wurden noch auf unterschiedlichste Art und in uneinheitlichen Varianten zur Verarbeitung von Beobachtungsdaten und zur Schätzung von Parametern theoretischer Modelle verwendet. Auf welche Weise sollten unbekannte Größen aus redundanten Daten statistisch korrekt bestimmt werden? Verschiedene Versuche wurden unternommen, um die Methode des arithmetischen Mittels zu verfeinern, zu verallgemeinern, und unter Anwendung auf die Kombination von Beobachtungen für kompliziertere Auswertungen nutzbar zu machen. Die ersten Wissenschaftler, welche dieses Problem in Angriff nahmen, wa-

[46] Cf. Clairaut 1760; Wilson 1993, 1995b.
[47] Auch Roger Joseph Boskovich oder Boscovich.

ren Tobias MAYER, EULER und Achille-Pierre Dionis DUSÉJOUR.[48] EULER war durch zwei grundsätzlich verschiedene Arbeiten mit dem Problem der Auswertung konfrontiert: die Verifikation seiner Theorie über die große Ungleichung von Jupiter und Saturn sowie die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus dem Venustransit von 1769. Die Bestimmung von Bahnelementen (z. B. von Kometen und Planeten) und von Bahnparametern (z. B. für die Konstruktion astronomischer Tafeln) aus alten und neuen Beobachtungen wären eigentlich prominente Beispiele für Parameterbestimmungs-Aufgaben. Dies trifft jedoch für die bis Ende des 18. Jahrhunderts verwendeten Bahnbestimmungs-Methoden nicht zu. In der Regel wurden aus der zur Verfügung stehenden Gesamtmenge von Beobachtungen eine Teilmenge (nach „vernünftigen Kriterien“) ausgelesen oder es wurden Beobachtungen gemittelt, so dass schließlich gleich viele Beobachtungen wie zu bestimmende Parameter zur Verfügung standen.

Im Hauptteil seiner Preis-Schrift über die große Ungleichung in den Bewegungen von Jupiter und Saturn [E.120] versuchte EULER, gewisse Konstanten aus Beobachtungen zu bestimmen. Zwei von ihnen waren Koeffizienten bestehend aus Sinus- und Kosinus-Funktionen, deren Argumente die Differenzen zwischen den Längen von Jupiter und Saturn sowie der exzentrischen Anomalie von Jupiter angaben. Es waren acht Unbekannte aus den Beobachtungen der ekliptikalen Längen der beiden Planeten zu bestimmen. Acht Beobachtungen und acht entsprechende Gleichungen hätten für deren Bestimmung genügt. EULER führte jedoch *Bedingungsgleichungen* ein, um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Beobachtungen immer mit Fehlern behaftet sind. Dies war ein sehr bedeutender Schritt, durch den die Statistik in die Astronomie eingeführt wurde. EULERs Absicht bestand darin, die Menge der Bedingungsgleichungen in genau so viele Teilmengen wie zu bestimmende Unbekannte derart zu unterteilen, dass durch Kombination (Addition oder Subtraktion) der Gleichungen bei einer oder zwei der Unbekannten jeweils große, bei den restlichen Unbekannten aber jeweils sehr kleine Koeffizienten resultierten. Die Terme mit den kleinen Koeffizienten konnten dann bei der Auflösung des Gleichungssystems nach den Unbekannten vernachlässigt werden. Dieses Prozedere wurde dann sukzessive zur Bestimmung der restlichen Parameter angewandt. Durch dieses Eliminationsverfahren mit Hilfe der Methode des Koeffizientenvergleichs hatte EULER aber auf Grund der Beobachtungs-Ungenauigkeiten und auf Grund der Tatsache, dass seine Methode

[48] Auch Du Séjour, cf. seine 18 Abhandlungen *Nouvelles méthodes analytiques* in den *HMP* für 1764-1783, die zusammen über 2.000 Druckseiten umfassen.

der Parameterbestimmung statistisch nicht ganz korrekt ist, nur mäßigen Erfolg. Sein Versuch enthielt jedoch zwei wichtige Aspekte: 1. Die Theorie sollte nicht nur mit *einer* Beobachtung oder einer kleinen Anzahl von Beobachtungen in exakte Übereinstimmung gebracht werden, sondern *sämtliche* Beobachtungen derart darstellen, dass die Abweichungen (Residuen) „irgendwie“ reduziert (minimiert) werden konnten; 2. Dies wurde durch Bedingungsgleichungen erreicht, aus deren Kombination gewisse Unbekannte präeliminiert und die gesuchten Parameter bestimmt werden konnten. Bereits um 1750 wandte Tobias MAYER diese Methode zum ersten Mal systematisch an.

EULER verfeinerte dieses Verfahren und führte damit die erste umfassende Parameter-Bestimmung in der Geschichte der exakten Wissenschaften durch, in der aus einer großen Zahl von Beobachtungen eines einzelnen astronomischen Ereignisses ein äußerst kleiner Parameter-Wert bestimmt werden sollte, nämlich die Sonnenparallaxe. Im Jahre 1770 präsentierte EULER der Petersburger Akademie seine Resultate zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus den Beobachtungs-Kampagnen anlässlich des Venustransits von 1769 [E.397]. Obwohl die Methode der kleinsten Quadrate noch nicht zur Verfügung stand, enthielt EULERs Methode neue Elemente, die (von der Zielsetzung her gesehen) einem modernen Parameterbestimmungs-Verfahren sehr ähnlich sind. Sie war allen anderen, damals allgemein gebräuchlichen Auswerte-Methoden weit überlegen.[49] Diese herkömmlichen Methoden bestanden im Wesentlichen darin, den Wert für die „beobachtete“ Sonnenparallaxe aus der Multiplikation des theoretischen (a priori angenommenen) Wertes für die Sonnenparallaxe mit dem Verhältnis zwischen einem reduzierten Beobachtungswert (Observable) und dem entsprechenden theoretischen Wert zu bestimmen. Die gesuchte Sonnenparallaxe ergab sich dann durch Mittelwertbildung über all jene auf diese Weise bestimmten Werte, die nicht stark voneinander abwichen. EULER dagegen formulierte die Beobachtungsgleichungen derart allgemein, dass er sie als Bedingungsgleichungen optimal an das Problem anpassen und sämtliche Beobachtungen verwenden konnte. Entscheidend war aber die Tatsache, dass er die durch die Theorie (Prädiktion) und die Beobachtung eingeführten Fehler in seinem Modell mitberücksichtigen und ebenfalls bestimmen konnte. Er deklarierte zu diesem Zweck die scheinbare Winkeldistanz zwischen den Zentren der Venus- und der Sonnenscheibe als Observable (obwohl dieser Winkel de facto nicht beobachtet, sondern aus den Beobachtungen abgeleitet wurde). Diese Observable wurde dann

[49] Cf. Verdun 2004a, 2004b.

einer Summe bestehend aus vier Termen gleichgesetzt: 1. Einen für die jeweilige Beobachtungsepoche aus der Theorie (Planetentafeln) ermittelter Näherungswert für die Winkeldistanz zwischen Venus- und Sonnenzentrum; 2. Einen Term, der die aus Theorie und Beobachtung stammenden Positionsfehler enthält; 3. Einen Term, der die durch die scheinbare Bewegung der Venus und durch die Ungenauigkeiten der Längenbestimmung der Beobachtungsstation sowie der Zeitmessungen induzierten Fehler enthält; und schließlich 4. Einen Term, der die gesuchte Sonnenparallaxe enthält. EULER bestimmte die in diesen Termen enthaltenen Parameter mittels der Beobachtungen und Bedingungsgleichungen iterativ. Ein Satz von geschätzten Parametern ergab erste Näherungswerte, mit denen die Parameter in einem zweiten Schritt verbessert wurden. Dieser Verbesserungs-Prozess wurde so durchgeführt, dass die Residuen einerseits im Betrag möglichst klein und andererseits im Vorzeichen sowohl positiv als auch negativ ausfielen, wodurch nur noch zufällige Fehler übrig blieben. Abgesehen von der wenig später erschienenen Arbeit von DUSÉJOUR war diese Art der Auswertung von Beobachtungsdaten einzigartig für die damalige Zeit. Damit war es EULER nicht nur möglich, einen Wert für die Sonnenparallaxe zu bestimmen, der dem heutigen sehr nahe kommt, sondern er konnte auch gleich die Fehler der verschiedenen Zeitmessungen angeben.

Im Jahr des Venusdurchgangs, 1769, vollendete DANIEL BERNOULLI sein Manuskript über die Charakterisierung von Beobachtungs-Fehlern. Darin leitete er ein Verfahren her, mit dem diese bestimmt werden können, wenn man eine halbkreisförmige Fehler-Verteilung annimmt. Nach einigen Änderungen veröffentlichte er seine Arbeit im Jahre 1778. Der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung besteht aus einer groben Analyse und einer ersten Anwendung einer Methode, die heute als Maximum-Likelihood-Verfahren bezeichnet wird. Sie enthielt jedoch schwerwiegende inhaltliche Mängel, die bereits von EULER bemerkt wurden. EULER legte deshalb am 5. Dezember 1776 in einer Abhandlung [E.488] seine Kommentare zu BERNOULLIs Arbeit der Petersburger Akademie vor, die 1778 publiziert wurden. EULER schlug darin ein Prinzip zur Bestimmung einer Messgröße durch Minimierung der Fehlerquadrat-Summe vor.[50] Er erkannte jedoch die Bedeutung dieses Prinzips nicht. In den 1770er Jahren entstanden erste moderne Theorien und Begriffe zur statistischen Behandlung von Beobachtungsdaten. Die Ausgleichsverfahren wurden sukzessive verbessert und erhielten schließlich ihre endgültige Form mit der Methode der klein-

[50] Dieses Prinzip wurde verbal bereits 1770 durch Boskovič formuliert (Cf. Stigler 1986, p. 47).

sten Quadrate, die zuerst 1805 durch Adrien Marie LEGENDRE in seinen *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*[51] publiziert wurde und durch GAUSS ihre mathematische Begründung erhielt.

Schlussfolgerung

Die Behandlung astronomischer Probleme im 18. Jahrhundert initialisierte und förderte die Entwicklung neuer Prinzipien und Methoden von allgemeinem Nutzen für die Wissenschaft. EULER trug wesentlich zu dieser Entwicklung bei. Er führte neue physikalische Begriffe in die theoretische Astronomie ein, etablierte analytische Methoden, verfeinerte Theorien und Techniken, und gab erste Impulse zur mathematischen und statistischen Verarbeitung astronomischer Beobachtungen. Er formulierte seine Ideen in einem klaren und einfachen Stil. Viele der heutigen wissenschaftlichen Methoden haben ihren Ursprung, sowohl inhaltlich als auch in der Notation, in diesem EULERschen Stil.

Nicht alle der astronomischen Arbeiten EULERs konnten hier berücksichtigt werden, und nicht alle Begriffe und Prinzipien, die für die Entstehung der wissenschaftlichen Methoden bedeutungsvoll waren, konnten angesprochen werden (z. B. mussten die Erhaltungsgesetze in Zusammenhang mit der im 18. Jahrhundert geführten „vis viva“-Kontroverse ausgelassen werden). Das hier präsentierte Material dokumentiert die Auswirkungen der in der Astronomie des 18. Jahrhunderts vollbrachten Leistungen, speziell der EULERschen Beiträge, auf die Entwicklung der exakten Wissenschaften, indem sie die „revolutionären“ Errungenschaften NEWTONs in die Sprache unserer modernen Wissenschaft umzusetzen vermochten.

[51] Cf. Legendre 1805.